I.N.P. – Fonctions de Plusieurs Variables
EXAMEN FINAL – 14 Juin 2017.

NOM, PRENOM :

Exercice 1. ***(COURS-6 points). Complétez les phrases suivantes :***

(1) *Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E.*

(a) *$\overline{A}$, l'adhérence de A, est le plus*

(b) *A°, l'intérieur de A est le*

(c) *$x \in A^\circ$ si et seulement si*

(d) *$x \in \overline{A}$ si et seulement si*

(2) *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.*

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(20,17) = \lim\limits_{t \to 0}$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(20,17) = \lim\limits_{t \to 0}$

Tournez la page s.v.p.

Exercice 2. ***(9 points).*** *Soit* $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2}, & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(1) Expliquez pourquoi $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

(2) Montrer que f *est continue en* $(0,0)$.

(3) Montrer que f *admet des dérivées partielle d'ordre* 1 *en* $(0,0)$.

(4) Calculer pour $(x,y) \neq (0,0)$ *les dérivées partielles* $\partial_x f(x,y),\ \partial_y f(x,y)$.

(5) Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$.

(6) Montrer que $\partial^2_{xy} f(0,0)$ *et* $\partial^2_{yx} f(0,0)$ *existent et sont égales.*

(7) Calculer pour $(x,y) \neq (0,0)$ *la dérivée partielle d'ordre* 2 *:* $\partial^2_{xy} f(x,y)$.

(8) Expliquez pourquoi on peut en déduire la valeur de $\partial^2_{yx} f(x,y)$ *sans faire de calcul.*

(9) Montrer que $\partial^2_{xy} f(x,y)$ *n'est pas continue en* $(0,0)$.

Exercice 3. ***(6 points).*** *Soit* $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par :*

$$f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2).$$

On note $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2 \leq 1\}$ *le disque unité fermé (**rappel :** c'est un fermé borné de* $\mathbb{R}^2$ *d'intérieur le disque ouvert :* $K^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2 < 1\}$.

(1) Montrer que $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$ *et* $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty$.

(2) Etudier les extrema locaux de f *sur* $\mathbb{R}^2$.

(3) Justifier sans calculs que f *est bornée sur* K *et atteint ses bornes.*

(4) On pose $M = \sup_{(x,y)\in K} f(x,y)$ *et* $m = \inf_{(x,y)\in K} f(x,y)$. *Soit* $(x,y) \in K$ *vérifiant* $f(x,y) = M$ *ou* $f(x,y) = m$, *montrer que* $x^2+y^2 = 1$.

(5) Etudier la fonction $[0,2\pi] \ni t \mapsto g(t) := f(\cos(t), \sin(t))$. *En déduire (observer que* $g\ g'(t) = -9\sin(t)\cos(2t)$*) les valeurs de* M *et* m.

Fin de l'épreuve.

5 juin 2017. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, .
Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr, Ouéb page : https://perso.math.univ-toulouse.fr/lassere/

Examen Final – Le Corrigé.

✿ Solution de l'exercice 1.

(1) (a) $\overline{A}$, l'adhérence de A, est le plus plus petit fermé contenant A.

(b) A°, l'intérieur de A est le est le plus grand ouvert contenu dans A.

(c) $x \in A^\circ$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.

(d) $x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ (ou encore s'il existe dans A une suite $(a_n)_n$ convergente vers x).

(2) (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(20, 17) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(20 + t, 17) - f(20, 17)}{t}$.

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(20, 17) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\partial_y f(20, 17 + t) - \partial_y f(20, 17)}{t}$. ■

✿ Solution de l'exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(1) f est le quotient deux polynômes donc classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ celui du dénominateur ne s'annulant qu'en $(0, 0)$, il est donc clair que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(2) En coordonnées polaires :

$$|f(x, y)| = \left| \frac{r^4 \sin(\theta)}{r^2} \right| = |r^2 \sin^2(\theta)| \leq r^2 \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0 = f(0, 0).$$

f est donc bien continue en $(0, 0)$.

(3) Nous avons :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

donc $\partial_x f(0, 0)$ existe et $\partial_x f(0, 0) = 0$.
De même

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 - 0}{t} = 0$$

donc $\partial_y f(0, 0)$ existe et $\partial_y f(0, 0) = 0$.

(4) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ un petit calcul nous donne :

$$\partial_x f(x, y) = -\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \partial_y f(x, y) = \frac{2y^3(2x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(5) Vu (1), il ne reste plus qu'à prouver la continuité des dérivées partielles d'ordre 1 à l'origine. Des deux questions précédente, si on passe en polaire :

$$|\partial_x f(x, y)| = \left| -\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq \frac{2r^5}{r^4} = 2r \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0 = \partial_x f(0, 0),$$

$$|\partial_y f(x, y)| = \left| \frac{2y^3(2x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq \frac{6r^5}{r^4} = 2r \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0 = \partial_y f(0, 0),$$

f est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

(6) On a :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial_y f(t, 0) - \partial_y f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0, \quad \lim_{t \to 0} \frac{\partial_x f(0, t) - \partial_x f(0, 0)}{t} \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

Donc, $\partial^2_{xy} f(0, 0)$ et $\partial^2_{yx} f(0, 0)$ existent et $\partial^2_{xy} f(0, 0) = 0 = \partial^2_{yx} f(0, 0)$.

(7) Si $(x,y)\neq(0,0)$, alors $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ où f est de classe C^∞ on peut donc calculer directement la dérivée partielle $\partial^2_{xy}f(x,y)$ et un calcul élémentaire donne

$$\partial^2_{xy}f(x,y)=-\frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

(8) Sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ f est classe C^2, donc par le théorème de Schwarz :

$$\partial^2_{yx}f(x,y)=\partial^2_{xy}f(x,y)=-\frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

(9) Si (x,y) tends vers $(0,0)$ en restant sur la première bissectrice (i.e. $x=y$) :

$$\lim_{x\to0}\partial^2_{xy}f(x,x)=\lim_{x\to0}-\frac{8x^6}{(2x^2)^3}=-1\neq0=\partial^2_{xy}f(0,0),$$

et $\partial^2_{xy}f(x,y),\ \partial_y f(x,y)$ est bien discontinue en $(0,0)$. ■

✿ Solution de l'exercice 3.

(1) $f(x,0)=x^3-3x$ donc $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}f(x,y)=+\infty$ et $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}f(x,y)=-\infty$.

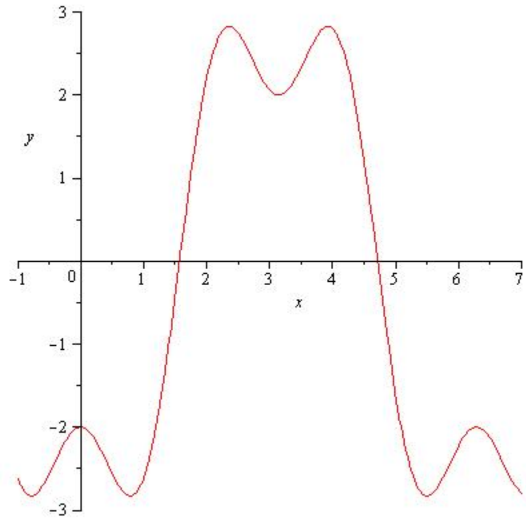
(2) Les points critiques de f vérifient $\partial_x f(x,y)=3x^2-3(1+y^2)=0$ et $\partial_y f(x,y)=-6xy=0$. Vu la seconde équation, il est nécessaire que $x=0$ ou $y=0$, et en reportant dans la première on trouve deux points critiques : $(1,0)$ et $(-1,0)$. Par le test de Monge, $rt-s^2=-36<0$ dans les deux cas : ce sont deux deux points col et f ne possède pas d'extrema locaux dans $\mathbb{R}^2$.

(3) f étant continue sur le fermé borné K, par un théorème du cours, on est alors assuré que f est bornée sur K et atteint ses bornes.

(4) Soit $(x,y)\in K$ vérifiant $f(x,y)=M$ ou $f(x,y)=m$. Alors où bien $x^2+y^2=1$ ou bien $x^2+y^2<1$, mais dans ce dernier cas notre extrema (x,y) est un point intérieur donc critique, ce qui est absurde vu (2) donc $x^2+y^2=1$.

(5) $g(t):=f(\cos(t),\sin(t))=\cos^3(t)-3\cos(t)[\sin^2(t)+1]$. f est paire et 2π périodique, on l'étudie sur $[0,\pi]$. De là $g'(t)=-9\sin(t)\cos(2t)$ on en déduit la tableau et les variations de f :

t	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
$g'(t)$		$-$		$+$		$-$	
$g(t)$	2	$\searrow$	$g(\frac{\pi}{4})=-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$g(\frac{3\pi}{4})=\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	2



Et finalement

$$\boxed{m = g(\pi/4) = f(\sqrt{2}/2\sqrt{2}/2) = -2\sqrt{2} \text{ et } m = g(3\pi/4) = f(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = 5\sqrt{2}/2.}$$

■