I.N.P. Annales 2010/2017. Suites & Séries de Fonctions.

Lassère P.

28 janvier 2019 **Lassère Patrice** : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE.
Page perso. : http://www.math.univ-toulouse.fr/ lassere/ Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr

Examen Mars 2010. :

Exercice 1. *On pose pour* $n \geq 2$ *et* $t \in \mathbb{R}$: $f_n(t) = \dfrac{te^{-nt}}{\log n}$.

(1) *Préciser le domaine de simple convergence de la* ***suite de fonctions*** $(f_n)_n$ *ainsi que sa limite.*

(2) *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}_+$.

(3) *Etudier la simple convergence de la* ***série de fonctions*** $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$.

(4)(a) *Calculer pour* $x > 2$ *l'intégrale* $\int_2^x \frac{dt}{t\log(t)}$ *et en « déduire » la nature de la série* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$.

(b) *La série de fonctions* $F(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$ *est-elle normalement convergente sur* $\mathbb{R}_+$?

(5) *Montrer la normale convergence sur tout* $[a, b]$ $(0 < a < b < +\infty)$.

(6) *Sur quel plus grand intervalle sommes nous assurés de la continuité de* F ?

(7)(a) *Montrer que pour tout* $N \geq 3$ *et* $x > 0$:

$$|F(x)| \leq \left|\sum_{n=2}^{N-1} f_n(x)\right| + \left|\sum_{n=N}^{\infty} f_n(x)\right| \leq \left|\sum_{n=2}^{N-1} f_n(x)\right| + \frac{x}{\log(N)} \cdot \frac{e^{-Nx}}{1 - e^{-x}}.$$

(b) *Montrer que pour tout* $N \geq 3$: $\lim_{x\to 0_+} |F(x)| \leq \dfrac{1}{\log(N)}$.

(c) *Montrer que* F *est continue à l'origine.*

(8) *Montrer que la série de fonctions* $G(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n'(x)$ *est normalement convergente sur tout intervalle* $[a, b]$ $(0 < a < b < +\infty)$.

(9) *Que peut-on en déduire quant à la dérivabilité de* F ?

(10) *On s'intéresse ici à la dérivabilité de* F *à l'origine.*

(a) *Montrer que pour tout* $N \geq 3$ *et* $x > 0$: $\left|\dfrac{F(x)}{x}\right| \geq \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{e^{-nx}}{\log(n)}$.

(b) *En déduire que* $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \left|\frac{F(x)}{x}\right| \geq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\log(n)}$.

(c) *Conclusion ?*

(11) *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\log(n)}$.

Tournez la page SVP

Exercice 2. *On pose pour $n \in \mathbb{N}$:* $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

(1) *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *(où* $f_n(t) = \frac{1}{1+t^n}$*) est simplement convergente sur* $[0,1]$ *vers une fonction* f *que l'on précisera.*

(2) *Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur* $[0,1]$.

(3) *Montrer que la suite* $(a_n)_n$ *converge et préciser sa limite* l.

(4) *Montrer qu'il existe un réel* $\alpha < 0$ *tel que*

$$a_n = l + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \to +\infty).$$

☯ ☢ ☯ Fin de l'épreuve. ☯ ☢ ☯

Examen Bis Mars 2011. :

Durée de l'épreuve 2h, pas de documents, calculatrice, téléphone
les logarithmes sont népériens et on admet que $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^\star$: $a_n = \int_0^\infty \frac{\log(t)e^{-nt}}{\sqrt{t}}dt$.

(1) Justifier la convergence des intégrales impropres.

(2) Par convergence dominée déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.

(3) Montrer que $a_n - l = -\frac{\log(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\pi} + \frac{J}{\sqrt{n}}$ *où* J *sera donné sous la forme d'une intégrale.*

Exercice 4. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *on pose* $f_n(t) = \sqrt{f^2(t) + \frac{1}{n}}$.

(1) Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

(2) Montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ *de la suite de fonctions* $(f_n)_n$.

Exercice 5. *On pose pour* $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = \sum_{n=1}^\infty xe^{-n^2x^2}$.

(1) Montrer que f *est bien définie.*

(2) Montrer qu'il n'y a pas normale convergence sur $\mathbb{R}_+$.

(3) Montrer qu'il y a normale convergence sur tout intervalle $[a,b]$, $(0 < a < b < +\infty)$.

(4) Qu'en déduire pour la continuité de f *?*

(5) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$: $f(1/N) \geq \sum_{n=1}^N \frac{e^{-n^2/N^2}}{N}$.

(6) f *n'est est-elle continue à l'origine ?*

(7) Montrer que pour tout $n \geq 1$ *et tout* $x > 0$: $\int_{n-1}^n xe^{-t^2x^2}dt \geq xe^{-n^2x^2} \geq \int_n^{n+1} xe^{-t^2x^2}dt$.

(8) En déduire que pour tout $x > 0$: $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \geq f(x) \geq \int_x^\infty e^{-u^2}du$.

(9) Montrer que f *est bornée sur* $\mathbb{R}_+$.

(10) f *admet-elle une limite en* 0_+ *?*

(11) Calculer $\int_0^\infty f(t)dt$.

Exercice 6. *(1) Calculer* $\int_a^b \sin^2(nt)dt$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) Existe-t-il un intervalle $[a,b]$ *non réduit à un point sur lequel la suite de fonctions* $(f_n(t) = \sin^2(nt))_n$ *converge simplement vers zéro ?*

(3) Même question avec la suite de fonctions $(g_n(t) = \sin(nt))_n$.

☯ ☢ ☯ Fin de l'épreuve. ☯ ☢ ☯

Examen Février 2011. :

Exercice 7. *Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = nx^n(1-x)$.*

(1) Etudier la simple convergence des deux suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ sur $[0,1]$.

(2) La suite $(f_n)_n$ est-elle uniformément convergente sur $[0,1]$?

(3) La suite $(g_n)_n$ est-elle uniformément convergente sur $[0,1]$?

Exercice 8. *On rappelle les formules vues en TD que l'on pourra admettre :*

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \forall\, t \in]-1,1[\quad : \ \log(1-t) = -\sum_{k\geq 1} \frac{t^k}{k}, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{k\geq 0} t^k.$$

(1) Après avoir justifié la convergence des intégrales impropres, montrer que

$$\int_0^{1/2} \frac{log(1-t)}{t} dt = \int_{1/2}^1 \frac{log(t)}{1-t} dt.$$

(2) Exprimer chacune des deux intégrales en fonction de $S := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n n^2}$.

(3) En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\log^2(2)}{2}$.

Exercice 9. *Soit* $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+x^{2n}} := \sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

(1) Montrer que f est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.

(2) La convergence est-elle uniforme sur $[0,1[$?

(3) Montrer que f est continue sur $]-1,1[$.

(4) Montrer que $x \in \mathscr{D}$ si et seulement si $1/x \in \mathscr{D}$.

(5) Exprimer $f(1/x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.

(6) En déduire que f est continue sur $\mathscr{D}$.

(7) Montrer que pour tout $0 < a < 1$ et $|x| \leq a$ on a $|f_n'(x)| \leq 2na^{n-1}$.

(8) Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(]-1,1[)$.

(9) Montrer que f est croissante sur $[0,1[$.

(10) Avec la question (5), montrer que $f \in \mathscr{C}^1(]1,+\infty[)$ et précisez ses variations sur $]1,+\infty[$.

(11) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$: $\frac{1}{2(1-x)} \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}$.

(12) En déduire la limite de f en 1_-.

(13) Quelle est la limite de f en 1_+ ?

(14) Quelle est la limite de f en $+\infty$?

(15) Esquisser le graphe de f sur $\mathbb{R}_+$

Examen Janvier 2012. :

Exercice 10. *(6 points) Soient $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Répondre aux questions suivantes ou bien fournir un contre-exemple, une représentation graphique du graphe de f_n peut parfaitement suffire.*

(1) On suppose que la suite $(f_n)_n$ est ***simplement*** *convergente sur $\mathbb{R}$ vers f.*

(a) Si les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi croissante sur $\mathbb{R}$?

(b) Si les f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$?

(c) Si les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi continue sur $\mathbb{R}$?

(d) Si les f_n sont bornées sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi bornée sur $\mathbb{R}$?

(2) On suppose que la suite $(f_n)_n$ est ***uniformément*** *convergente sur $\mathbb{R}$ vers f.*

(a) Si les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi croissante sur $\mathbb{R}$?

(b) Si les f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$?

(c) Si les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi continue sur $\mathbb{R}$?

(d) Si les f_n sont bornées sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi bornée sur $\mathbb{R}$?

Exercice 11. *(11 points) On rappelle que $\zeta(2) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(3) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3} \simeq 1.2$.*

(1) A l'aide des sommes partielles $1 + x + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

(2) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$: $\log(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

(3) Préciser (soigneusement) le domaine de définition de $F(x) = \int_0^1 t^x \log(t)\log(1-t)dt$.

(4) Montrer que F est continue sur $]-2,+\infty[$.

(5) Montrer que pour tout $x > -2$ on a $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+x+1)^2}$.

(6) Montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$.

(7) Montrer que $F(1) = \int_0^1 t\log(t)\log(1-t)dt = 1 - \frac{\zeta(2)}{2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}$.

(8) Calculer $F(-1)$ et montrer que $F(0) = \int_0^1 \log(t)\log(1-t)dt = 2 - \zeta(2) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 12. *(4 points) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{ch(x)}$ est convergente, enfin montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{ch(x)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.*

☯ ☢ Fin de l'épreuve ☢ ☯

Examen Bis, Février 2012. :

Exercice 13. *(5 points) Soient $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ est **simplement** convergente sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.*

(1) Si les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$ montrer que f est aussi croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) On suppose les f_n strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, montrer à l'aide d'un exemple judicieusement choisi que f n'est pas forcément strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

*(3) On suppose les f_n bornées sur $\mathbb{R}$, et la suite $(f_n)_n$ **uniformément** convergente sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.*

(a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq 1$.

(b) Montrer que f est aussi bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. *(10 points) Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.*

*(1) Étudier la simple convergence sur $\mathbb{R}$ de cette **suite** de fonctions.*

(2) Montrer que la convergence de la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

*(3) Étudier la simple convergence sur $\mathbb{R}$ de la **série** de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.*

(4) Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ n'est pas normale sur $\mathbb{R}$.

(5) Étudier l'uniforme convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.

(6) En déduire que $\sum_{n\geq 0} f_n = f$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$.

(7) Montrer que pour tout $x > 0$ on a $G(x) := \sum_{n\geq 0} e^{-nx^2} = \frac{1}{1-e^{-x^2}}$.

(8) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $G'(x) = -2f(x)$ pour tout $x > 0$.

(9) Montrer que f n'est pas continue à l'origine.

Exercice 15. *(6 points) Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n nx^2}$.*

(1) Etudier la simple convergence sur $[0,1]$ de cette suite de fonctions.

(2) Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$.

(3) Calculer la $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

(4) En déduire que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

(5) Donner une démonstration directe du fait que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

☯ ☢ **Fin de l'épreuve** ☢ ☯

Examen Bis Mars 2013. :

Exercice 16. *(5 points, cours) On considère une suite de fonctions $(f_n)_n$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

(1) *Donner la définition de : « la suite de fonctions $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers f ».*

(2) *Donner la définition de : « la suite de fonctions $(f_n)_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers f ».*

(3) *Donner la définition de : « la série de fonctions $\sum_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers g ».*

(4) *Donner la définition de : « la série de fonctions $\sum_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers g ».*

(5) *Donner la définition de : « la série de fonctions $\sum_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ vers g ».*

(6) *A quelle condition peut-on affirmer que que la série de fonctions $g = \sum_n f_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 17. *(15 points) On pose $f_n(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^n}$, $\quad x \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}$.*

(1)(a) *Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$*

(b) *Etudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$ en déduire que $\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = f_n\left(\sqrt{\frac{3}{2n-3}}\right)$.*

(c) *La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?*

(2)(a) *Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$ vers un polynôme f que l'on explicitera.*

(b) *La convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?*

(3) *On pose maintenant $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt,\ x \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}^\star$.*

(a) *Montrer que la suite $(F_n)_n$ est simplement convergente vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.*

(b) *Montrer que F_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$.*

(c) *Déduire des deux questions précédentes que la suite $(F_n)_n$ est uniformément convergente sur $[0, a]$ pour tout $a > 0$.*

(d) *Pour quels entiers n l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt$ est-elle convergente ?*

(e) *Montrer que pour tout*

$$n \geq 3,\ x \geq 0 \quad : 0 \leq F_n(x) \leq \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt = F_n(1) + \int_1^{+\infty} f_n(t)dt < +\infty.$$

(f) *Montrer que $f_n(t) \leq \frac{1}{t^{2n-3}}$ pour tout $t \geq 1$.*

(g) *En déduire que pour $n \geq 3$: $0 \leq F_n(x) \leq F_n(1) + \frac{1}{2n-4}$.*

(h) *La suite de fonctions $(F_n)_n$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$?*

Examen Mars 2013. :

Exercice 18. *(5 points, cours)*

(1) Reproduisez sur votre copie le tableau ci-dessous et dans la seconde ligne indiquez les (douze) implications ou non implications entre les différents modes de convergence d'une série de fonction (uniforme convergence(UCV), absolue convergence (ACV), normale convergence (NCV) et simple convergence (SCV)). La première case a été remplie ***à titre d'exemple****, c'est probablement incorrect...)*

UCV	NCV	UCV	SCV	UCV	SCV
$\not\Uparrow\ \not\Downarrow$	$??$	$??$	$??$	$??$	$??$
NCV	ACV	ACV	NCV	SCV	ACV

(2) On considère une suite de fonctions $(f_n)_n$ continues par morceaux, intégrables et simplement convergente sur $\mathbb{R}$. Donner une condition suffisante pour que $\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$.

(3) On considère une suite de fonctions $(f_n)_n$ continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$. Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, donner une condition suffisante pour que $\sum_{n\geq 0}\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}}\sum_{n\geq 0} f_n(t)dt$.

Exercice 19. *(6 points) On pose pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+$: $f_n(t) = \frac{(x+ne^{-x})(x^3+1)}{e^x+n}$.*

(1) Etudier la simple convergence sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

(2) Montrer que $f_n \in L^1(\mathbb{R}_+)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

(3) On note $f = \lim_n f_n$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \ : \quad |f_n(x) - f(x)| \leq g(x).$$

(4) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt = 7$.

Exercice 20. *(11 points) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}dt$.*

(1) Déterminer (soigneusement) le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

(2) Montrer que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.

(3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.

(4) Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star \setminus \{\pm 1\}$.

(5) En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{\pm 1\}$.

(6) Calculer $f'(1)$ et $f'(-1)$ en justifiant vos affirmations.

(7) Expliquer pourquoi f ne peut être dérivable à l'origine (citer proprement le résultat de L1 que vous appliquez).

(8) Montrer qu'il existe une constante C telle que $f(x) = \pi\ln(1+|x|) + C$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(9) En écrivant $f(0) = \int_0^{+\infty}\frac{2\ln(t)}{1+t^2}dt = \int_0^1\frac{2\ln(t)}{1+t^2}dt + \int_1^{+\infty}\frac{2\ln(t)}{1+t^2}dt$ montrer que $f(0) = 0$.

(10) En déduire C et esquisser le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Examen Mars 2014. :

Exercice 21. *(5 points) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^\star$ on pose* $f_n(x) = \dfrac{\sin(x^n)}{x^n} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$.

(1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(2) La convergence peut-elle être uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$?

(3) Justifier la convergence des intégrales impropres $I_n := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x^n)}{x^n} \cdot \frac{dx}{1+x^2}$.

(4) Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge et préciser sa limite.

Exercice 22. *(15 points) On pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$:* $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

(1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$ vers la fonction nulle.

(2) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$ vers la fonction nulle.

(3) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$. On notera maintenant $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$, $(x > 0)$ sa somme.

(4) Montrer que $F(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

(5) Montrer qu'il n'existe de réels $0 < a < b$ tels que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ soit normalement convergente sur le segment $[a, b]$.

(6) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(7) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(8) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(9) Montrer que $F'(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

(10) Soit $x > 0$. Donner une expression simple pour $F(x+1) + F(x)$.

(11) Montrer que pour tout $x > 0$: $0 < F(x) \leq 1/x$.

(12) Montrer que l'intégrale $G(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1} dt$ *est bien convergente pour $x > 0$.*

(13) Montrer que pour tout $x > 0$: $G(x) + G(x+1) = 1/x$.

(14) Montrer que pour tout $x > 0$: $0 < G(x) \leq 1/x$.

(15) On pose $H(x) = F(x) - G(x)$. Montrer que H est 2-périodique et $\lim_{x\to\infty} H(x) = 0$.

(16) Montrer que pour tout $x > 0$: $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{x+n} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1} dt$.

(17) Montrer que $F(x) \underset{x\to 0_+}{\sim} \frac{1}{x}$.

(18) Montrer que pour tout $x > 1$: $F(x) + F(x+1) \leq 2F(x) \leq F(x) + F(x-1)$.

(19) En déduire que $F(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

(20) Esquisser le graphe de F sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Examen Bis Mars 2014. :

Problème : (20 points) On pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $f_n(x) = \exp(-x\sqrt{n})$.

(1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$.

(3) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$. On notera dorénavant $F(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ sa somme pour $x > 0$.

(4) Montrer que $F(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

(5) Pour $a > 0$, étudier la normale convergence sur $[a, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$.

(6) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(7) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(8) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(9) Montrer que F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(10) Soit $x > 0$: Montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $\exp(-x\sqrt{n}) \geq \exp(-nx)$ et en déduire que $F(x) \geq \frac{\exp(-x)}{1-\exp(-x)}$ puis, $\lim_{x\to 0_+} F(x)$.

(11) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x > 0$:

$$\int_n^{n+1} \exp(-x\sqrt{t})dt \leq \exp(-x\sqrt{n}) \leq \int_{n-1}^{n} \exp(-x\sqrt{t})dt.$$

(12) En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\int_1^{\infty} \exp(-x\sqrt{t})dt \leq F(x) \leq \int_0^{\infty} \exp(-x\sqrt{t})dt.$$

(13) A l'aide du changement de variables $u = x\sqrt{t}$, en déduire que pour tout $x > 0$: $-2 + 2/x^2 \leq F(x) \leq 2/x^2$.

(14) En déduire un équivalent de F en 0_+.

(15) F est-elle intégrable en 0 ?

(16) Calculer $\int_1^{+\infty} |f_n(t)|dt$.

(17) Quelle la nature de la série de terme général $\int_1^{+\infty} |f_n(t)|dt$?

(18) Montrer que F est intégrable sur $[1, +\infty[$ et exprime $\int_1^{+\infty} F(t)dt$ sous la forme d'une somme.

(19) En écrivant $\exp(x)F(x) = 1 + \sum_{n\geq 2} \exp(-x(-1 + \sqrt{n})) := 1 + G(x)$, montrer que la série de fonctions définissant G est normalement convergente sur $[1, +\infty[$ et en déduire que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

(20) En déduire un équivalent de F de $+\infty$, puis esquisser le graphe de F.

Examen Mars 2015. :

Exercice 23. *(10 points). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la suite de fonctions $(f_{\alpha,n})_n$ sur $\mathbb{R}_+$ par :*

$$f_{\alpha,n}(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx}).$$

(1) Montrer que la suite de fonctions $(f_{\alpha,n})_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction h_α que l'on précisera.

(2) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

(3) A l'aide de la question précédente (i.e. ***sans calculer*** *l'intégrale), déterminer la limite :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_{\alpha,n}(x).$$

(4) La question (2) vous autorise-t-elle d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_{2,n}(t)dt = \int_0^1 h_2(t)dt \qquad ?$$

(5) Vérifier ou nier l'égalité précédente par un calcul direct.

(6) On pose pour $n \geq 0$: $g_{\alpha,n}(x) = f_{\alpha,n}(x) - h_\alpha(x)$.

(a) Montrer que la série de fonction $\sum_n g_{\alpha,n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On posera $g_\alpha = \sum_n g_{\alpha,n}$.

(b) A l'aide de la question (2), montrer que la série de fonction $\sum_n g_{\alpha,n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha < 0$.

(c) Montrer que pour $\alpha < 0$: $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n\geq 0} g_\alpha(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 g_{\alpha,n}(x)dx.$

(d) Montrer que pour $\alpha < 1$: $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n\geq 0} g_\alpha(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 g_{\alpha,n}(x)dx.$

Exercice 24. *(10 points). Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}dt.$$

(1) Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $f'(x)$ sous forme d'une intégrale.

(3) Montrer que $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$, calculer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(4) On note g l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = f(x^2)$. Montrer que (on pourra calculer la dérivée du terme de gauche) :

$$g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \pi/4.$$

(5) Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(6)(a) Montrer que $\displaystyle\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$ *est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.*

(b) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(c) En déduire (avec (5)) que φ est solution sur $\mathbb{R}_+^\star$ de l'équation différentielle $y'(x)-y(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$

Fin de l'épreuve.

Examen Mars 2016. :

On définit la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2x^2}$, $\quad x \geq 0, \quad n \geq 1$. **On rappelle** enfin que : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$.

(1) Montrer que la **suite de fonctions** $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f que l'on précisera.

(2) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

(3) En déduire (i.e. **sans calculer** l'intégrale), la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2016} f_n(x)$.

(4) La question (2) vous autorise-t-elle d'écrire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} f_n(t)dt = \int_0^{\infty} f(t)dt$?

(5) Vérifier ou nier l'égalité précédente en calculant explicitement $\displaystyle\int_0^{\infty} f_n(t)dt$.

(6) Étudier la simple convergence de la **série de fonction** $F(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$.

(7) La série de fonction $F(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$?

(8) F est-elle continue sur $\mathbb{R}_+^\star$?

(9) Montrer que $\sum_n f_n'$ est normalement convergente sur tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^\star$.

(10) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(11) Montrer que F est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(12) Montrer que : $\dfrac{\pi^2}{6(1+x^2)} \leq F(x) \leq \dfrac{\pi^2}{6x^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^\star$.

(13) Donnez un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tends vers $+\infty$.

(14) Montrer que F est intégrable en $+\infty$.

(15) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $x > 0$: $\quad f_{n+1}(x) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t + x^2t^2} \leq f_n(x)$.

(16) En déduire que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dt}{t + x^2t^2} \leq F(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t + x^2t^2}$.

(17) En déduire que

$$-2\ln(x) + \ln(1+x^2) \leq F(x) \leq \frac{1}{1+x^2} - 2\ln(x) + \ln(1+x^2)$$

puis : $F(x) \sim_{0_+} -2\ln(x)$.

(18) En déduire que F est intégrable en 0.

(19) Donnez le tableau de variation de F et esquisser le graphe de F sur son domaine de définition.

(20) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} F(t)dt = \sum_{n\geq 1} \int_0^{\infty} f_n(t)dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Fin de l'épreuve.

Examen Février 2017. :

Exercice 1 (7 points) : Soit $f\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$. **Rappel :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(1) Montrer que f est définie, continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $0 < f(x) < \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$.

(2) Montrer que pour tout $x > 0$: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-v^2}}{1+v^2/x}dv$ pour en « déduire » que $f(x) \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

(3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

(4) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y(x) - y'(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

(5) En déduire l'existence de trois réels a, b, c (que l'on précisera) vérifiant : $f'(x) + \dfrac{b}{x^c} \sim_{0_+} a$.

(6) Donner le tableau des variations (en justifiant les limites aux bornes du domaines de f et f') et esquisser le graphe de f.

Exercice 2 (15 points) : On pose pour $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}^\star$: $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(xn)}$.

(1) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ est simplement convergente sur $]1, +\infty[$. On posera dorénavant pour $x > 1$: $F(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$.

(2) Existe-t-il un intervalle $I \subset]1, +\infty[$ sur lequel la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement ?

(3) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur $]1, +\infty[$.

(4) Montrer que $F \in \mathscr{C}^0(]1, +\infty[)$.

(5) Étudier la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

(6) Montrer que $F(x) > 0$ pour tout $x > 1$.

(7) Montrer que $F(x) < \dfrac{1}{\ln(x)}$ pour tout $x > 1$.

(8) Pour $x > 1$ on pose : $C = \displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}, \quad F(x) = \frac{1}{\ln(x)} + \sum_{n\geq 2} f_n(x) = \frac{1}{\ln(x)} + G(x)$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1_+} G(x) = C$.

   (b) En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque x tends vers 1_+.

(9) Montrer que $F \in \mathscr{C}^1(]1, +\infty[)$.

(10) Montrer que F est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

(11) Esquisser le graphe de F.

Examen Février 2018. :

Exercice 25. *Rappel :* $\zeta(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$.

(1)(a) *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *est simplement convergente sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f *que l'on précisera.*

(b) *En déduire sans aucun calcul si la convergence est uniforme sur* $\mathbb{R}$.

(c) *Calculer* $\|f_n - f\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$.

(d) *Retrouver la réponse à la seconde question.*

(e) *Esquisser le graphe des fonctions* f_n *et* f *sur un même schéma.*

(2) *On considère maintenant la série de fonctions* $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

(a) *Préciser le domaine de définition* $\mathscr{D}_F$ *de* F.

(b) *Étudier la continuité de* F *sur son domaine de définition.*

(c) *Étudier la dérivabilité de* F *sur son domaine de définition.*

(d) *Montrer que pour tout réel non nul* x : $1 \leq F(x) \leq 1 + \frac{\pi^2}{6x^2}$.

(e) *En remarquant que pour tout* $x > 0$ *et* $N \geq 2$: $F(x) \geq 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+n^2x^2}$, *en déduire* $\lim_{x\to 0_+} F(x)$.

(f) *Donner le tableau des variations de* F *sur son domaine de définition en précisant les limites de* F *aux extrémités de son domaine.*

(g) *Esquisser le graphe de* F *sur son domaine.*

(3)(a) *Montrer que pour* $n \geq 1$, *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ *converge et préciser la nature de la série de terme général* $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

(b) *Montrer que pour* $n \geq 1$, *l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ *converge et préciser la nature de la série de terme général* $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$.

(c) *Montrer que* $\int_1^{+\infty} F(t)dt$ *diverge.*

(d) *Montrer que* $F(t) - 1$ *est intégrale sur* $[1, +\infty[$.

(e) *Montrer que* $\int_1^{+\infty} (F(t) - 1)\, dt = \int_1^{+\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{dt}{1+n^2t^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{artan}(1/n)}{n}$.

(4) On pose pour $H(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}dt}{1+x^2t^2}$.

(a) Montrer que H *est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+^\star$.

(b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

(c) Montrer que Pour $x \in]0,1[$: $H(x) \geq e^{-1} \displaystyle\int_1^{1/x} \frac{dt}{1+x^2t^2}$, *en déduire la limite* $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} H(x)$.

Fin de l'épreuve.