Suites et Séries de Fonctions, Théorèmes de Convergence.

Patrice Lassère

Université Paul Sabatier, Toulouse (France).

7 janvier 2019

Definition

Dans tout ce chapitre I est une partie (en général un intervalle) de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On appellera **suite de fonction** définie sur I la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une fonction $f_n \ : \ I \to \mathbb{K}$.
On notera, par analogie avec les suites numériques, $(f_n)_n$ la suite de fonctions de terme général f_n.

Suites de fonctions

Definition

Dans tout ce chapitre I est une partie (en général un intervalle) de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On appellera **suite de fonction** définie sur I la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une fonction $f_n \ : \ I \to \mathbb{K}$.
On notera, par analogie avec les suites numériques, $(f_n)_n$ la suite de fonctions de terme général f_n.

Quelques exemples :

- $f_n(x) = x^n$,
- $g_n(x) = (1 + x/n)^n$
- $h_n(x) = nx^n(1 - x)$

Definition

Soit $A \subset I$, on dira que la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge simplement sur** A vers la fonction $f \ : \ A \to \mathbb{K}$, si pour tout $a \in A$ la suite de scalaires $(f_n(a))_n$ converge vers une limite notée $f(a)$. Autrement dit :

$$\forall\, a \in A, \ \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$

ou plus précisément

$$\forall\, a \in A, \ \forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, N_{\varepsilon,a} \ : \ n \geq N_{\varepsilon,a} \implies |f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

On dit alors parfois que f est la **limite simple** sur A de la suite $(f_n)_n$.

Exemples :

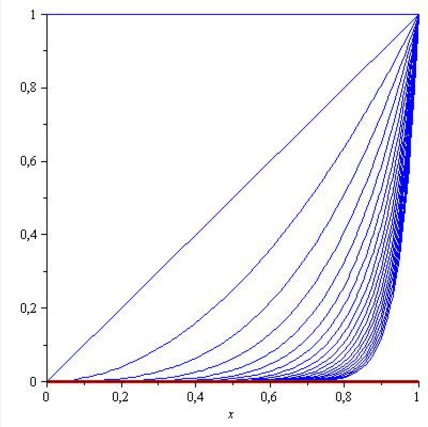
- 

Figure – $f_n(x) = x^n$, $n = 0 \dots 2$, $f(x) = 0$, $x \in [0, 1[$, $f(1) = 1$.

Exercices :

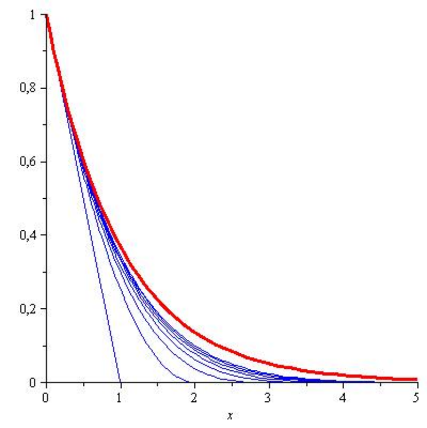
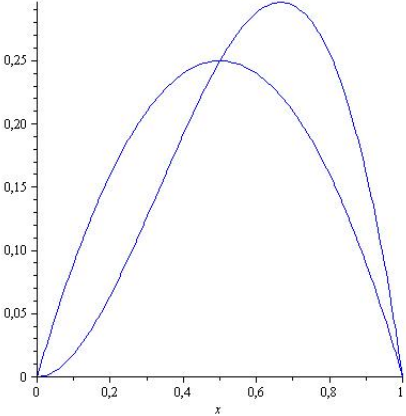


Figure – $f_n(x) = (1 - x/n)^n \, \mathbf{1}_{[0,n]}(x),\ n = 0 \ldots 2,\ f(x) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R}_+.$

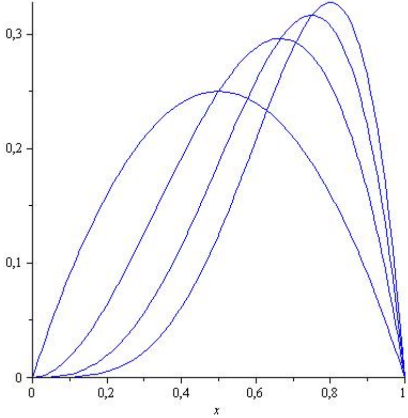
La suite de terme général $f_n(x) = nx^n(1-x)$.

- $n = 0, 1, 2.$



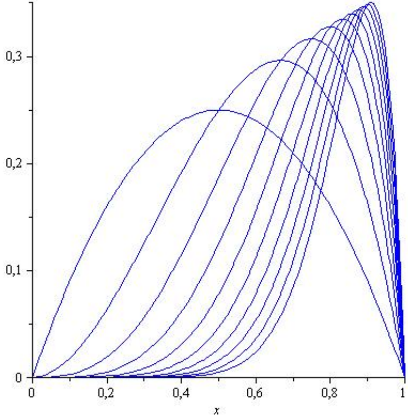
La suite de terme général $f_n(x) = nx^n(1-x)$.

- $n = 0, 1, 2.$
- $n = 0, 1, \dots, 4.$



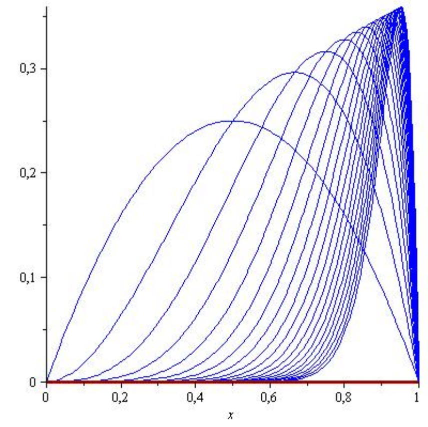
La suite de terme général $f_n(x) = nx^n(1-x)$.

- $n = 0, 1, 2.$
- $n = 0, 1, \dots, 4.$
- $n = 0, 1, \dots 10.$



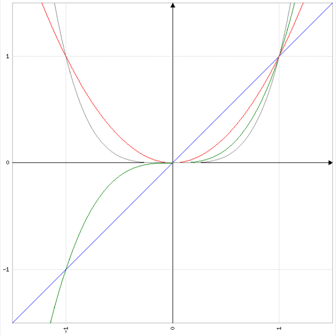
- La suite de terme général $f_n(x) = nx^n(1-x)$.

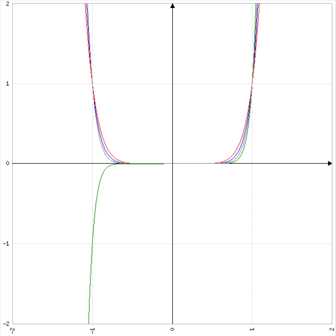
- La suite de terme général $f_n(x) = nx^n(1-x)$.



Remarque : La suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$ est clairement simplement convergente sur $]-1,1]$ vers la fonction $f(x) = 0$ si $x \in]-1,1[$ et $f(1) = 1$; observez bien que toutes les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $]-1,1]$ alors que f n'est même pas continue (en $x = 1$).

Remarque : La suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$ est clairement simplement convergente sur $]-1,1]$ vers la fonction $f(x) = 0$ si $x \in]-1,1[$ et $f(1) = 1$; observez bien que toutes les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $]-1,1]$ alors que f n'est même pas continue (en $x = 1$).





Remarques :

- La phrase seule « la suite $(f_n)_n$ converge simplement » n'a **aucun sens** : il est absolument indispensable de préciser sur quoi et écrire : « la suite $(f_n)_n$ converge simplement **sur** A... ».

Remarques :

- La phrase seule « la suite $(f_n)_n$ converge simplement » n'a **aucun sens** : il est absolument indispensable de préciser sur quoi et écrire : « la suite $(f_n)_n$ converge simplement **sur** A... ».
- L'unicité de la limite usuelle dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ nous assure de l'unicité de la limite f d'une suite de fonctions.

Remarques :

- La phrase seule « la suite $(f_n)_n$ converge simplement » n'a **aucun sens** : il est absolument indispensable de préciser sur quoi et écrire : « la suite $(f_n)_n$ converge simplement **sur** A... ».
- L'unicité de la limite usuelle dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ nous assure de l'unicité de la limite f d'une suite de fonctions.
- Grâce au **critère de Cauchy** pour les suites numériques, on peut comme toujours établir la simple convergence sur A d'une suite $(f_n)_n$ sans pour autant connaitre la limite f potentielle : $(f_n)_n$ est simplement convergente sur A, si et seulement si :

$$\forall\, a \in A,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N_{\varepsilon,a}\ :\ n \geq N_{\varepsilon,a}\ \&\ p \in \mathbb{N}$$
$$\text{implique} \qquad |f_{n+p}(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon.$$

Comme le montre l'exemple de la suite de terme général $f_n(x) = x^n$, la « simple convergence » ne préserve même pas la continuité. Nous avons donc besoin d'introduire une notion plus « forte » de convergence pour les suites de fonctions :

Comme le montre l'exemple de la suite de terme général $f_n(x) = x^n$, la « simple convergence » ne préserve même pas la continuité. Nous avons donc besoin d'introduire une notion plus « forte » de convergence pour les suites de fonctions :

Definition

Soit $A \subset X$, on dira que la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément sur** A vers f, si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \ : \ n \geq N_\varepsilon \implies |f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon, \ \forall a \in A.$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \sup_{a \in A} |f_n(a) - f(a)| = \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_A = 0.$$

On dit alors parfois que f est la **limite uniforme** sur A de la suite $(f_n)_n$.

Exercices :

- Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$.

Exercices :

- Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$.
- (à chercher pour le premier TD). Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions de terme général $f_n(x) = (1 - x/n)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$.

Exercices :

- Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$.
- (à chercher pour le premier TD). Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions de terme général $f_n(x) = (1 - x/n)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$.
- Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions de terme général $f_n(x) = x + 1/n$ et faire de même pour la suite $(f_n^2)_n$.

Quelques observations importantes :

- Comme le veut la tradition on désignera $\sup_{a\in A}|f_n(a)-f(a)|$ en général par $\|f_n-f\|_{A,\infty}$ ou même $\|f_n-f\|_A$ s'il n'y a pas de risques de confusion.

Quelques observations importantes :

- Comme le veut la tradition on désignera $\sup_{a\in A}|f_n(a)-f(a)|$ en général par $\|f_n-f\|_{A,\infty}$ ou même $\|f_n-f\|_A$ s'il n'y a pas de risques de confusion.
- Si on note $\alpha_n := \sup_{a\in A}|f_n(a)-f(a)| \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, la convergence uniforme sur A de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f est équivalente à la convergence vers zéro de la suite de réels $(\alpha_n)_n$.

Quelques observations importantes :

- Comme le veut la tradition on désignera $\sup_{a\in A} |f_n(a) - f(a)|$ en général par $\|f_n - f\|_{A,\infty}$ ou même $\|f_n - f\|_A$ s'il n'y a pas de risques de confusion.
- Si on note $\alpha_n := \sup_{a\in A} |f_n(a) - f(a)| \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la convergence uniforme sur A de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f est équivalente à la convergence vers zéro de la suite de réels $(\alpha_n)_n$.
- Déterminer un « sup » est parfois délicat ; par théorème de comparaison il est bien entendu suffisant de trouver une suite de réels $(\varepsilon_n)_n$ convergente vers 0 et vérifiant pour tout $x \in A$ et $n \geq n_0$: $\|f_n - f\|_A \leq \varepsilon_n$. Par exemple : $f_n(x) = \sin(n\cos(x^2 + n))/n...)$.

Convergence uniforme

- Une suite de fonctions $(f_n)_n$ uniformément convergente sur A vers f est aussi simplement convergente sur A vers f et bien entendu la réciproque est fausse ; toutefois, si A est **fini** : convergence simple et uniforme sur A coincident... (pourquoi ?).

- Une suite de fonctions $(f_n)_n$ uniformément convergente sur A vers f est aussi simplement convergente sur A vers f et bien entendu la réciproque est fausse ; toutefois, si A est **fini** : convergence simple et uniforme sur A coincident... (pourquoi ?).
- Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ le graphe de f_n est inclus dans la partie du plan définie par $\{\,(x, y)\ :\ x \in A \quad \text{et } y \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\,\}$, (faire une petite figure). C'est la « gaine » d'épaisseur ε autour de la courbe f.

- Nous avons vu plus haut la suite de fonctions $(f_n(x) = x^n)_n$ qui est simplement convergente sur $]-1,1]$ vers $f(x) = 0$ si $x \in]-1,1[$ et $f(1) = 1$. La convergence n'est toutefois pas uniforme sur $]-1,1]$ car un calcul facile nous donne $\sup_{]-1,1]} |f_n - f| = 1$.

Proposition

1. *Pour montrer qu'une suite* $(f_n)_n$ *ne converge pas uniformément vers* f *sur* A *il sera suffisant de trouver une suite* $(x_n)_n$ *dans* A *telle que la suite* $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ *ne tende pas vers zéro.*

Proposition

1. *Pour montrer qu'une suite* $(f_n)_n$ *ne converge pas uniformément vers* f *sur* A *il sera suffisant de trouver une suite* $(x_n)_n$ *dans* A *telle que la suite* $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ *ne tende pas vers zéro.*
2. *Si une suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur une partie* A*, elle converge aussi uniformément sur toute partie* $B \subset A$*.*

Proposition

1. *Pour montrer qu'une suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur A il sera suffisant de trouver une suite $(x_n)_n$ dans A telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne tende pas vers zéro.*
2. *Si une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur une partie A, elle converge aussi uniformément sur toute partie $B \subset A$.*
3. *Si une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur deux parties A et B, alors elle converge aussi uniformément sur $B \cup A$. Ce résultat s'étend immédiatement alors à un nombre* ***fini*** *de parties $A_1, \dots, A_N$ mais généralement tombe en défaut pour une famille dénombrable $A_1, \dots, A_k, \dots,$ (voir l'exemple plus bas).*

Démonstration : La faire. ∎

Remarque

Observez que la suite de terme général $f_n(x) = x^n$ *converge uniformément sur tout intervalle* $I_k = [0, 1 - k^{-1}]$ $(k \geq 1)$ *mais pas sur la réunion qui est* $[0, 1[$...

Remarque

Le second critère est très utile pour prouver la non-uniforme convergence sur une partie A. Parfois étudier les variations de $f_n - f$ *peut être fastidieux voire inaccessible et dans tous les cas couteux en temps... ! Alors qu'avec un peu de flair, on peut quelquefois éviter cette étude...*
Par exemple, pour la suite de fonctions de terme général $f_n(x) = x^n$ *considérer la suite* $x_n = 1 - n^{-1}$, $(n \in \mathbb{N}^\star)$ *nous avons* $f_n(x_n) - f(x_n) = (1 - n^{-1})^n - 0$ *qui converge vers* $e^{-1} > 0$. *Par contre, observez bien qu'il y aura bien uniforme convergence sur* $[-r, r]$ *pour tout* $0 < r < 1$ *ce qui résulte de l'inégalité* $\|f_n - f\|_{[-r,r]} \leq r^n$... *Tester aussi* $x_n = (1 - 1/\sqrt{n}), (1 - 1/n^2)$ *pour bien comprendre l'importance de bien choisir* x_n *et pas seulement tester une suite qui converge vers la zone à problèmes...*

Théorème

(critère de Cauchy uniforme) *Une suite de fonctions $(f_n)_n$ est uniformément convergente sur A si et seulement si elle satisfait au critère de Cauchy uniforme sur A, i.e.*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ (\forall\, n, m \geq N) \implies (\|f_n - f_m\|_A \leq \varepsilon)\,,$$

que l'on peut aussi énoncer sous la forme :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ (\forall\, n \geq N, p \in \mathbb{N}) \implies (\|f_{n+p} - f_n\|_A \leq \varepsilon)\,.$$

Démonstration : Supposons que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur A et soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies \forall x \in A \ : \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Soient alors p et q deux entiers vérifiant $p \geq N$ et $q \geq N$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in A \ : \ |f_p(x) - f_q(x)| &\leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ : p, q \geq N \implies \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$: $(f_n)_n$ satisfait donc bien au critére de Cauchy uniforme sur A. Réciproquement si la suite $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A alors en particulier pour tout $x \in A$ la suite $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet donc convergente, notons $f(x)$ sa limite : la suite $(f_n)_n$ est donc simplement convergente vers f sur A.

Montrons que la convergence est uniforme sur A : soit $\varepsilon > 0$, du critère de Cauchy uniforme sur A il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq N$ impliquent $\|f_p - f_q\|_A \leq \varepsilon$. Soit $p \geq N$ fixé, nous avons

$$\forall x \in A,\ \ q \geq N \implies |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon,$$

on peut donc faire tendre q vers $+\infty$ ce qui, par convergence simple donne :

$$\forall x \in A, \implies |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

soit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ : p \geq N \implies \|f_p - f\|_A \leq \varepsilon,$$

et la convergence est bien uniforme sur A, C.Q.F.D. ■

Comme nous l'avons vu plus haut certaines propriétés comme la continuité ne sont pas transmises par simple convergence. Nous allons voir dans ce paragraphe comment la notion plus forte de convergence uniforme rend une certaine aisance dans ce problèmes.

Conservation de propriétés par convergence uniforme

Comme nous l'avons vu plus haut certaines propriétés comme la continuité ne sont pas transmises par simple convergence. Nous allons voir dans ce paragraphe comment la notion plus forte de convergence uniforme rend une certaine aisance dans ce problèmes.

Théorème

(convergence uniforme et continuité) *Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle A de $\mathbb{K}$ et a un point de A. Si :*

- *Toutes les fonctions f_n sont continues au point a*
- *la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A.*

alors, f est continue au point a.
Il en résulte immédiatement que : si chacune des fonctions f_n est continue sur A et si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur A, alors f est continue sur A .

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, par convergence uniforme sur A nous pouvons écrire :

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, par convergence uniforme sur A nous pouvons écrire :

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \implies \forall x \in A, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3,$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, par convergence uniforme sur A nous pouvons écrire :

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \implies \forall\, x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3,$$

mais f_{N_ε} est continue au point a, donc :

$$\exists\, \eta(\varepsilon) > 0 \ : \ (\, x \in A \text{ et } |x - a| < \eta(\varepsilon)\,) \\ \implies |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| < \varepsilon/3,$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, par convergence uniforme sur A nous pouvons écrire :

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \implies \forall x \in A, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3,$$

mais f_{N_ε} est continue au point a, donc :

$$\exists\, \eta(\varepsilon) > 0 \ : \ (\, x \in A \text{ et } |x - a| < \eta(\varepsilon)\,) \implies |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| < \varepsilon/3,$$

Soit alors $x \in A$ tel que $|x - a| < \eta(\varepsilon)$, on a vu ce qui précède :

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, par convergence uniforme sur A nous pouvons écrire :

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;:\; n \geq N \implies \forall\, x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3,$$

mais f_{N_ε} est continue au point a, donc :

$$\begin{aligned} \exists\, \eta(\varepsilon) > 0 \;:\; (\, x \in A \text{ et } |x - a| < \eta(\varepsilon)\,) \\ \implies |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| < \varepsilon/3, \end{aligned}$$

Soit alors $x \in A$ tel que $|x - a| < \eta(\varepsilon)$, on a vu ce qui précède :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &< |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)| + |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| + |f_{N_\varepsilon}(a) - f(a)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$, par convergence uniforme sur A nous pouvons écrire :

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ n \geq N \implies \forall x \in A, \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3,$$

mais f_{N_ε} est continue au point a, donc :

$$\exists\, \eta(\varepsilon) > 0 \ : \ (\, x \in A \text{ et } |x - a| < \eta(\varepsilon)\,) \implies |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| < \varepsilon/3,$$

Soit alors $x \in A$ tel que $|x - a| < \eta(\varepsilon)$, on a vu ce qui précède :

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &< |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)| + |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| + |f_{N_\varepsilon}(a) - f(a)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.\end{aligned}$$

$f \ : \ A \to \mathbb{R}$ est donc bien continue au point a. ∎

Remarques

- *Parfois il n'y a pas convergence uniforme sur A mais seulement convergence uniforme dans un voisinage de chaque point de A, on dit alors qu'il y a convergence uniforme locale sur A ; le théorème précédent peut tout de même s'appliquer sur chacun de ces voisinages pour en déduire la continuité de f sur A.*
- *Sous sa forme négative, ce théorème est aussi un outil efficace pour justifier la non convergence uniforme sur une partie de $\mathbb{K}$: par exemple la suite de fonctions continues sur $[0,1]$: $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$, f est visiblement discontinue en $x = 1$ donc sur $[0,1]$ et il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[0,1]$.*

- La suite de terme général $f_n(x) = x^n$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 1[$ vers la fonction (continue) identiquement nulle : la condition suffisante du théorème n'est pas nécessaire.
- Il est aussi important de remarquer dans les exemples ci-dessus que la suite de terme général $f_n(x) = x^n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, 1 - l^{-1}]$ $(l \geq 1)$ mais pas sur la réunion qui est $[0, 1[$...

Pour motiver le théorème suivant il est important de commencer par observer sur l'exemple : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ que au contraire de la continuité, la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ n'est pas suffisante pour pouvoir affirmer que $f := \lim_n f_n$ soit dérivable.

Théorème

(convergence uniforme et dérivation) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle A de $\mathbb{K}$. Si :*

- *Toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur A,*
- *la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f en au moins un point a de A,*
- *la suite $(f_n')_n$ converge uniformément vers g sur A.*

Alors la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur A et uniformément sur tout intervalle compact $[c, d] \subset A$, vers une fonction f qui est de classe de classe C^1 sur A et $f' = g$.

Démonstration : • On commence par montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de $[a, b]$. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $[c, d] \in A$, écrivons pour $x \in [c, d]$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a) + (f_n - f_m)(a)|$$

Démonstration : • On commence par montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de $[a,b]$. Soient $m,n\in\mathbb{N}$ et $[c,d]\in A$, écrivons pour $x\in[c,d]$:

$$|f_n(x)-f_m(x)| = |(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(a)+(f_n-f_m)(a)|$$

alors avec le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)| &\leq |(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(a)|+|(f_n-f_m)(a)|\\ &\leq |x-a|\cdot|(f_n'-f_m')(\zeta)|+|(f_n-f_m)(a)|,\ \zeta\in(a,x),\\ &\leq |x-a|\cdot\|f_n'-f_m'\|_A+|(f_n-f_m)(a)|.\end{aligned}$$

Démonstration : • On commence par montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de $[a,b]$. Soient $m,n\in\mathbb{N}$ et $[c,d]\in A$, écrivons pour $x\in[c,d]$:

$$|f_n(x)-f_m(x)|=|(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(a)+(f_n-f_m)(a)|$$

alors avec le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)| &\leq |(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)(a)|+|(f_n-f_m)(a)|\\ &\leq |x-a|\cdot|(f'_n-f'_m)(\zeta)|+|(f_n-f_m)(a)|,\ \zeta\in(a,x),\\ &\leq |x-a|\cdot\|f'_n-f'_m\|_A+|(f_n-f_m)(a)|.\end{aligned}$$

Soit alors $[\alpha,\beta]\subset A$ contenant $[c,d]$ et a, l'inégalité précédente s'écrit :

$$\sup_{x\in[c,d]} |f_n(x)-f_m(x)| = \|f_n-f_m\|_{[c,d]} \leq |\beta-\alpha|\cdot\|f_n'-f_m'\|_A+|(f_n-f_n)(a)|$$

$$\sup_{x\in[c,d]} |f_n(x)-f_m(x)| = \|f_n-f_m\|_{[c,d]} \leq |\beta-\alpha|\cdot\|f_n'-f_m'\|_A+|(f_n-f_n)(a)|$$

ce qui nous permet de conclure (car $(f_n')_n$ converge uniformément sur A pour le premier terme et car la suite $(f_n(a))_n$ est de Cauchy car convergente pour le second) que la suite $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur tout intervalle $[c,d] \subset A$. Notons f la limite de la suite $(f_n)_n$.

$$\sup_{x\in[c,d]} |f_n(x)-f_m(x)| = \|f_n-f_m\|_{[c,d]} \leq |\beta-\alpha|\cdot\|f_n'-f_m'\|_A+|(f_n-f_n)(a)|$$

ce qui nous permet de conclure (car $(f_n')_n$ converge uniformément sur A pour le premier terme et car la suite $(f_n(a))_n$ est de Cauchy car convergente pour le second) que la suite $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur tout intervalle $[c, d] \subset A$. Notons f la limite de la suite $(f_n)_n$.
Il est bon d'observer que la convergence n'est pas forcément uniforme sur A si A n'est pas borné, d'où le recours de se placer sur un segment (c'est essentiel dans la preuve pour majorer $|x - a|$...).

• Il reste à prouver que f est dérivable (observez que f est déjà continue sur A comme limite uniforme sur tout intervalle $[c, d] \subset A$ de la suite de fonctions continues $(f_n)_n$) et $f' = g$.
Soient $x \neq y$ dans A. Il s'agit donc de montrer que

• Il reste à prouver que f est dérivable (observez que f est déjà continue sur A comme limite uniforme sur tout intervalle $[c, d] \subset A$ de la suite de fonctions continues $(f_n)_n$) et $f' = g$.
Soient $x \neq y$ dans A. Il s'agit donc de montrer que $\lim_{y \to x} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - g(x) \right| = 0$. Pour cela, on écrit

• Il reste à prouver que f est dérivable (observez que f est déjà continue sur A comme limite uniforme sur tout intervalle $[c,d]\subset A$ de la suite de fonctions continues $(f_n)_n$) et $f'=g$.
Soient $x\neq y$ dans A. Il s'agit donc de montrer que $\lim_{y\to x}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-g(x)\right|=0$. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-g(x)\right| &\leq \left|\frac{f(x)-f(y)-[f_n(x)-f_n(y)]}{x-y}\right| \\ &\quad+\left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}-f_n'(x)\right|+|f_n'(x)-g(x)| \\ &\leq \left|\frac{f(x)-f(y)-[f_n(x)-f_n(y)]}{x-y}\right| \\ &\quad+\left|f_n'(\zeta)-f_n'(x)\right|+\|f_n'-g\|_A\end{aligned}$$

Pour le premier terme, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)-f_n(x)+f_n(y)| &= \lim_{m\to\infty} |(f_m-f_n)(x)-(f_m-f_n)(y)| \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \|f'_m-f'_n\|_{[c,d]}|x-y| \\ &= \|g-f'_n\|_A|x-y|. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)-f_n(x)+f_n(y)| &= \lim_{m\to\infty}|(f_m-f_n)(x)-(f_m-f_n)(y)|\\ &\le \lim_{m\to\infty}\|f_m'-f_n'\|_{[c,d]}|x-y|\\ &= \|g-f_n'\|_A|x-y|.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-g(x)\right| &\le \|g-f_n'\|_A+|f_n'(\zeta)-f_n'(x)|+\|g-f_n'\|_A\\ &= 2\|g-f_n'\|_A+|f_n'(\zeta)-f_n'(x)|\end{aligned}$$

Pour le premier terme, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)-f_n(x)+f_n(y)| &= \lim_{m\to\infty}|(f_m-f_n)(x)-(f_m-f_n)(y)| \\ &\leq \lim_{m\to\infty}\|f'_m-f'_n\|_{[c,d]}|x-y| \\ &= \|g-f'_n\|_A|x-y|.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-g(x)\right| &\leq \|g-f'_n\|_A+|f'_n(\zeta)-f'_n(x)|+\|g-f'_n\|_A \\ &= 2\|g-f'_n\|_A+|f'_n(\zeta)-f'_n(x)|\end{aligned}$$

où $\zeta\in(x,y)$. Le premier terme du second membre est inférieur à 2ε pour $n\geq N$ et pour un tel n le second terme sera aussi inférieur à ε si $|x-y|<\eta$ par continuité de f'_n au point x.

Par conséquent
$$\lim_{y\to x}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=g(x)$$
et f est dérivable en tout $x\in A$ avec $f'(x)=g(x)$. ∎

Remarques

- *En fait vérifier la simple convergence de la suite* $(f_n)_n$ *en seulement un point de* A *suffit, toutefois, au moins un point est essentiel comme le prouve l'exemple* $f_n(x) = n, \ x \in \mathbb{R}$.
- *On utilise souvent ce théorème localement pour montrer la dérivabilté sur* $\mathbb{R}$ *ou sur intervalle ouvert si l'on a pas la convergence uniforme sur le domaine entier.*

Remarques

- *En fait vérifier la simple convergence de la suite* $(f_n)_n$ *en seulement un point de A suffit, toutefois, au moins un point est essentiel comme le prouve l'exemple* $f_n(x) = n,\ x \in \mathbb{R}$.
- *On utilise souvent ce théorème localement pour montrer la dérivabilté sur* $\mathbb{R}$ *ou sur intervalle ouvert si l'on a pas la convergence uniforme sur le domaine entier.*

Exercice :

Etudier les suites de fonctions $(f_n)_n$ et $(f_n')_n$ où $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$.

Théorème

(premier échange $\int \lim = \lim \int$) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues (ou continues par morceaux) sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ et uniformément convergente vers f, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration : f est continue sur $[a,b]$ comme limite uniforme de fonctions continues, elle est donc intégrable sur $[a,b]$. Pour $n\in\mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(t)dt-\int_a^b f(t)dt\right| &\leq \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,dt\\ &\leq (b-a)\|f_n-f\|_{[a,b]},\end{aligned}$$

on alors termine facilement la preuve. ∎

Remarques

- *C'est faux en général sur un intervalle non borné ; par exemple sur $\mathbb{R}_+$: considérer (donner aussi un exemple sur $[0,1]$ avec des chapeaux) les fonctions f_n affines par morceaux continues : positives, égales à $1/n$ sur $[0,n]$, nulles sur $[n+1/n,+\infty[$. Alors $\|f_n\|_{\mathbb{R}_+} = 1/n$, la suite $(f_n)_n$ est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f \equiv 0$, toutefois* $0 = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt \neq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{2n}) = 1$.
- *Ce contre-exemple marque aussi les limites de la convergence uniforme pour justifier des échanges de limite, nous verrons des outils plus performants dans la troisième partie, rendant (sauf cas triviaux) presque obsolète ce dernier théorème.*

C'est un des résultats principaux de cette année en Analyse.

Théorème

(théorème d'Approximation de Weierstrass). *Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{K})$, il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*
La forme équivalente qui suit est aussi souvent fort utile :

$$\forall f \in \mathscr{C}([a;b],\mathbb{K}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{R}[x] \ :\ \|f - P\|_{[a,b]} \leq \varepsilon.$$

Démonstration : Devoir ou sur ma page... ■

Remarques

- *Autrement dit, l'espace* $\mathbb{R}[x]$ *des polynômes à coefficients réels est une partie dense de* $\mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$ *muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Remarques

- *Autrement dit, l'espace* $\mathbb{R}[x]$ *des polynômes à coefficients réels est une partie dense de* $\mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$ *muni de la topologie de la convergence uniforme.*
- *Le résultat est faux sur* $\mathbb{R}$ *(voir TD) d'ailleurs une suite de polynômes uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$ *ne peut que converger vers un polynôme ; il est en fait aussi faux sur tout intervalle borné non fermé, pour la partie « fermé » cela résulte du fait qu'une limite uniforme de fonctions bornées est bornée.*

Remarques

- *Autrement dit, l'espace* $\mathbb{R}[x]$ *des polynômes à coefficients réels est une partie dense de* $\mathscr{C}([a;b],\mathbb{R})$ *muni de la topologie de la convergence uniforme.*
- *Le résultat est faux sur* $\mathbb{R}$ *(voir TD) d'ailleurs une suite de polynômes uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$ *ne peut que converger vers un polynôme ; il est en fait aussi faux sur tout intervalle borné non fermé, pour la partie « fermé » cela résulte du fait qu'une limite uniforme de fonctions bornées est bornée.*
- *On en déduit facilement que toute fonction continue admet une primitive sans la théorie de l'intégration...*

Exercice

Montrer que $f(t) = \sin(1/t)$, continue sur $]0,1]$ n'est pas, sur $]0,1]$, limite uniforme d'une suite de polynômes.

Version trigonométrique équivalente :

Théorème

(théorème d'Approximation trigonométrique de Weierstrass).
Pour tout fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques (i.e. d'éléments de vect$\{ e^{int},\ n \in \mathbb{Z}\}$).

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{K}$, par analogie avec la dualité entre les suites et les séries numériques on définit la suite $(S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k)_n$,
C'est ce que l'on appelle une **série de fonctions**, on la note $\sum_n f_n$ et la fonction $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ est la **n-ième somme partielle** de la série $\sum_n f_n$.

Definition

- On dira que la série $\sum_n f_n$ **converge simplement** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge simplement sur A, la limite de la suite $(S_n)_n$ est la fonction somme de la série et est noté $S = \sum_n f_n$; autrement dit pour tout $x \in A$ la série numérique $\sum_n f_n(x)$ converge dans $\mathbb{K}$ vers $S(x)$.
- On appelle alors **reste d'ordre** n de la série $\sum_n f_n$ la fonction R_n définie sur A par : $\forall\, x \in A \quad : \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1} f_k(x)$. On aura alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$.
- On dira que la série $\sum_n f_n$ **converge uniformément** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur A, il en résulte aussitot que la convergence uniforme de $\sum_n f_n$ entraine la convergence simple. propriétés :

Des résultats obtenus pour suites de fonctions, on déduit facilement :

Théorème

- *Si la série* $\sum_n f_n$ *converge uniformément sur* A *alors la suite* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers zéro sur* A.
- *Une série* $\sum_n f_n$ *simplement convergente sur* A *est uniformément convergente sur* A *si et seulement si, la suite* $(R_n)_n$ *des restes converge uniformément vers zéro sur* A

Démonstration :

- La série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A, il en est donc de même de la suite $(S_n)_n$ et en particulier pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geq N \implies \|S_{n+1} - S_n\|_A = \|f_n\|_A \leq \varepsilon$ i.e. $(f_n)_n$ converge uniformément vers zéro sur A.
- Si la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A vers S alors la suite de fonctions de terme général $S - S_n = R_n$ convergera uniformément vers 0 sur A.
  Réciproquement, si la série converge simplement vers S et si R_n converge uniformément vers 0 sur A, alors la suite $S_n = S - R_n$ converge uniformément vers 0 sur A. ∎

Exemples : Considérons la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^{-nx}$. La série est grossièrement divergente pour tout $x < 0$ et pour $x > 0$ nous avons $xe^{-nx} = o(n^{-2})$ ce qui assure la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ (en $x = 0$ c'est évident). On a mÃłme pour tout $x > 0$

$$S_n(x) = x\sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = x \cdot \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{1 - e^{-x}} = S(x).$$

De même on a, toujours pour $x > 0$:

$R_n(x) = x\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-kx} = \dfrac{xe^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}$. Une rapide étude des variations de cette fonction sur $\mathbb{R}_+^\star$ nous montre que $R_n(1/n+1) \sim e^{-1}$ ce qui empêche la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$. Il y a toutefois convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ puisque $x \geq a$ implique $0 \leq R_n(x) \leq \frac{ae^{-(n+1)a}}{1-e^{-a}}$.

Proposition

(Critère de Cauchy Uniforme) : *La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ :\ \forall n \geq N,\ p \in \mathbb{N},\ \|f_{n+1} + \cdots + f_{n+p}\|_A \leq \varepsilon.$$

Démonstration : C'est le critère de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions appliqué à la suite $(S_n)_n$. ■

Vérifier la convergence uniforme d'une série de fonctions par sa définition est en général assez délicat, le seul cas où il est facile de conclure est le suivant :

Théorème

(le cas des séries alternées de fonctions) : *Soit $\sum_n (-1)^n f_n$ une série de fonctions de A dans $\mathbb{R}$, si :*

- *Pour tout $x \in A$ la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante,*
- *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers zéro sur A,*

alors la série de fonctions $\sum_n (-1)^n f_n$ est uniformément convergente sur A.

Démonstration : Les hypothèses assurent que l'on peut appliquer pour tout $x \in A$ le théoréme des séries alternées à la série numérique $\sum_n (-1)^n f_n(x)$. En particulier, la majoration du reste donne

$$|S(x) - S_n(x)| \leq |g_{n+1}(x)| \leq \|g_{n+1}\|_A.$$

La convergence uniforme sur A de $\sum_n (-1)^n f_n$ en découle. ∎

Exemple : Par exemple, la série de fonctions $\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

Comme on le disait plus haut, le cas particulier des séries alternées est l'une des rares situations (ormi le cas des où l'on peut sommer un nombre fini d'éléments : cas encore plus rarissime...) où il est facile d'établir la convergence uniforme.
En général c'est bien délicat ; c'est pourquoi on va introduire un nouveau mode de convergence : la **convergence normale** notion plus forte mais plus facile à vérifier.

Definition

- On dira que la série $\sum_n f_n$ **converge absolument** sur A, si pour tout $x \in A$ la série $\sum_n |f_n(x)|$ converge. D'aprés la théorie des séries numériques, la convergence absolue implique la convergence simple.
- On dira que la série $\sum_n f_n$ **converge normalement** sur A si la série $\sum_n \|f_n\|_A$ converge. Il est bien entendu souvent plus simple (mais équivalent) de d'exhiber une suite de réels $(\alpha_n)_n$ vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x \in A\ :\ |f_n(x)| \leq \alpha_n$ et $\sum_n \alpha_n < +\infty$.

Il faut commencer par s'assurer que la normale convergence entraine bien l'uniforme convergence.

Proposition

La série $\sum_n f_n$ converge normalement sur A alors elle converge absolument et uniformément sur A et on a

$$\left\| \sum_n f_n \right\|_A \leq \sum_n \|f_n\|_A .$$

Démonstration :

Que la convergence normale entraine la convergence absolue est clair. Soit $(\alpha_n)_n \in l^1(\mathbb{N})$ vérifiant $\|f_n\|_A \leq \alpha_n$, on a $\forall\, n, p \in \mathbb{N},\ \ x \in A$:

$$|f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)| \leq \|f_{n+1}\|_A+\cdots+\|f_{n+p}\|_A \leq \alpha_{n+1}+\cdots+\alpha_{n+p}$$

qui montre que la série de fonctions $\sum_n f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A et y est donc uniformément convergente. Enfin pour tous $x \in A,\ \ n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k(x)\|_A \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k(x)\|_A$$

soit aprés avoir fait tendre n vers l'infini et pris le « sup » l'inégalité désirée. ∎

Remarques :

- Comme établir directement la convergence uniforme d'une série de fonctions peut être terriblement compliqué, la convergence normale est plus simple à établir (il faut chercher le sup de seulement une fonction pas d'une somme finie) : il est donc souvent fort utile de commencer par vérifier (si elle a lieu..) la convergence normale.
  La convergence normale entraine la convergence uniforme mais **attention** la réciproque est fausse. En particulier tout suite de fonction non absolument convergente ne peut Ãłtre normalement convergente.
  Par exemple la série de fonction (vue plus haut) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$ est uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ mais n'est absolument convergente que sur $]1, +\infty[$, elle est d'ailleurs normalement convergence sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.

Les résultats pour les suites de fonctions se transportent immédiatement aux séries de fonctions en passant aux sommes partielles puisque, souvenons nous, une série de fonction converge uniformément si et seulement si la suite de fonctions de ses sommes partielles converge uniformément.

Théorème

(convergence uniforme et continuité) *Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{K}$ et a un point de A. Si :*

- *Toutes les fonctions f_n sont continues au point a.*
- *La série $\sum_n f_n$ converge uniformément vers f sur A.*

Alors, $f = \sum_n f_n$ est continue au point a. En particulier si $\sum_n f_n$ converge uniformément vers f sur A et si les $f_n \in \mathscr{C}^0(A)$, alors f est continue sur A.

Démonstration :

La faire ∎

Théorème

(convergence uniforme et dérivation) *Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{K}$. Si :*

- *Toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur A.*
- *La série $\sum_n f_n$ converge simplement vers f sur A.*
- *La série $\sum_n f_n'$ converge uniformément vers g sur A*

Alors, la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout compact de A vers f qui est de classe de classe C^1 et vérifie $f' = g$. Et on peut, comme pour les suites de fontions, itérer ce théorème pour montrer que f est de classe C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Démonstration :

La faire ■

Exemple :

Etudions en détail la fonction $\zeta(x) := \sum_{n\geq 1} n^{-x}$.

- Posons pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(x) = n^{-x}$; la suite de fonctions $(f_n)_n$ est clairement simplement convergente vers 0 sur $\mathbb{R}_+^\star$ et la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty$ (série de Riemann).
- Il n'y a pas normale convergence sur $]1, +\infty[$ puisque $\|f_n\|_{]1,+\infty[} = 1/n$ est le terme général d'une série divergente. Toutefois comme pour tout $a > 1$: $\|f_n\|_{[a,+\infty[} = n^{-a}$ terme général d'une série de Riemann convergente $(a > 1)$ nous avons la normale convergence sur $[a, +\infty[$ (et donc l'uniforme convergence) pour tout $a > 1$. Le cours nous assure alors que ζ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$: elle est donc **continue** sur $] - 1, +\infty[$.

- Pour la dérivabilité : nous avons pour tout $x > 1,\ k \in \mathbb{N}^\star$: $f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\log n)^k}{n^x}$ puis pour tout $a > 1$: $\|f_n^{(k)}\|_{[a,+\infty[} = \frac{(\log n)^k}{n^a}$ qui est le terme général d'une série convergente d'aprés le « test du n^α » puisque en écrivant $a = 1 + u$: $n^{1+u/2}\frac{(\log n)^k}{n^a} = \frac{(\log n)^k}{n^{u/2}}$ tends vers zéro avec n.
  Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ la série $\sum_n f_n^{(k)}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$ c'est plus qu'il n'en faut pour appliquer le théorème précédent : ζ est indéfiniment dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$: elle est donc **indéfiniment dérivable** sur $]-1, +\infty[$ et on a $\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n\geq 1} f_n^{(k)}(x)$.
- En particulier $\zeta'(x) = -\sum_{n\geq 1}\log(n)n^{-x} < 0\ (x > 1)$, ζ est donc **décroissante** sur $]-1, +\infty[$.
- Nous avons aussi $\zeta''(x) = \sum_{n\geq 1}\log^2(n)n^{-x} > 0\ (x > 1)$, ζ est donc **convexe** sur $]-1, +\infty[$.

- Pour parfaire l'étude de la fonction ζ sur $]-1,+\infty[$ étudions son comportement aux bornes 1_+ et $+\infty$: par positivité nous avons pour tout $x>1$ et tout entier $N\geq 1$:
$\zeta(x)\geq\sum_{n=1}^N n^{-x}$ donc $\lim_{x\to 1}\zeta(x)\geq\sum_{n=1}^N n^{-1}$ et ceci pour tout $N\in\mathbb{N}$. Mais il est notoire que $\lim_N\sum_{n=1}^N n^{-1}=+\infty$ par conséquent $\lim_{x\to 1}\zeta(x)=+\infty$.
En $+\infty$ écrivons : $\zeta(x)=1+2^{-x}+\sum_{n\geq 3}n^{-x}$; on va montrer que $\sum_{n\geq 3}n^{-x}$ est un $o(2^{-x}$ en $+\infty$: des règles de comparaison séries/intégrales on tire facilement :
$0\leq\sum_{n\geq 3}n^{-x}\leq\int_2^\infty t^{-x}dt=\frac{2^{-x+1}}{x-1}$ et l'équivalent suit immédiatement. Ainsi en $+\infty$: $\zeta(x)=1+2^{-x}+o(2^{-x}$ en particulier $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$. Il est maintenant facile d'esquisser le graphe de la fonction ζ.

Théorème

Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions continues sur l'intervalle ***fermé borné*** $[a, b]$ *et uniformément convergente vers f, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration :

La faire ■

Dans les paragraphes précédents les résultats essentiels que nous avons rencontrés tournent tous autour d'échanges de limites : inversion $\lim \int = \int \lim$, $\lim \sum = \sum \lim$, $\sum \int = \int \sum$, continuité, dérivabilité d'une limite d'une suite ou d'une série de fonctions... Nous avons rencontré quelques conditions suffisantes pour justifier ces échanges mais dans des conditions souvent trop restrictives (intégrales non impropres, nécessité de convergence uniforme...) pour être vraiment efficaces. Les théorèmes[a] qui suivent répondent à ces lacunes et sont (nous le verrons en TD) en général assez faciles à manipuler.

Dans tout ce qui suit, et comme le veut la tradition dire que f est intégrable sur I veut dire que l'intégrale $\int_I |f(t)|dt$ converge, on dit alors que $f \in L^1(I)$.

---

a. Nous n'avons pas le temps d'en donner les démonstrations, mais elles sont accessibles dans les ouvrages classiques : [?], [?] par exemple...

Théorème

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$, intégrables et continues par morceaux sur A. On suppose que :

- *La suite est croissante $f_n \leq f_{n+1}$,*
- *La suite est simplement convergente vers f continue par morceaux sur A.*

Alors f est intégrable sur A si et seulement si la suite $\left(\int_A f_n(t)dt\right)_n$ est majorée, et dans ce cas nous avons :

$$\int_A f(t)dt = \int_A \lim_n f_n(t)dt = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n(t)dt = \lim_n \int_A f_n(t)dt.$$

Si la suite est décroissante f est intégrable sur A si et seulement si la suite $\left(\int_A f_n(t)dt\right)_n$ est minorée, et dans ce cas nous avons : $\int_A f(t)dt = \int_A \lim_n f_n(t)dt = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int_A f_n(t)dt = \lim_n \int_A f_n(t)dt$.

Exemple :

On considère la suite $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$. La suite de fonctions $(f_n(t) = \tan^n(t))_n$ est simplement convergente sur $A = [0, \pi/4]$ vers la fonction continue par morceaux
$f(t) = 0,\ \ t \in [0, \pi/4[,\ \ f(\pi/4) = 1$. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0, \pi/4]$.
La suite est visiblement décroissante donc par convergence monotone :
$\lim_n \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt = \int_0^{\pi/4} \lim_n \tan^n(t)dt = \int_0^{\pi/4} f(t)dt = 0$.
On peut d'ailleurs aussi justifier cet échange avec le théoréme ci-dessous (comment ?) :

Théorème

convergence dominée Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$, continues par morceaux sur A. On suppose que :

- *La suite est simplement convergente vers f continue par morceaux sur A.*
- *Il existe une fonction $g \in L^1(A)$ vérifiant l'hypothèse de domination : $|f_n(t)| \leq g(t),\ \forall\, t \in A,\ \ n \in \mathbb{N}$*

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur A et nous avons :

$$\int_A f(t)dt = \int_A \lim_n f_n(t)dt = \lim_n \int_A f_n(t)dt.$$

Exemple :

• Cherchons la limite $\lim_n \int_o^{\infty} \dfrac{dt}{t^n + e^t}$. La suite de fonctions $(f_n(t) = (t^n + e^t)^{-1})_n$ est simplement convergente sur $A = \mathbb{R}_+$ vers la fonction continue par morceaux f nulle sur $]-1, +\infty[$, égale à $(1+e)^{-1}$ en $t = 1$ et à e^{-t} sur $[0, 1[$. Comme $|f_n(t)| \leq e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on peut appliquer le théorème de la convergence dominée pour en déduire que

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}_+} f_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} \lim_n f_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)dt = \int_0^1 e^{-t}dt = 1 - e^{-1}.$$

• Vous pour aussi traiter l'exemple précédent : $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$ avec la convergence dominée...

Et la version séries de fonctions :

Théorème

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$, continues par morceaux et intégrables sur A. On suppose que :

- *La série $\sum_n f_n$ est simplement convergente vers f continue par morceaux sur A.*
- *Il existe une fonction $g \in L^1(A)$ vérifiant : $|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)| \leq g(t),\ \forall\, t \in A,\ n \in \mathbb{N}$ (hypothèse de domination).*

Alors f est intégrable sur A et nous avons :

$$\int_A f(t)dt = \int_A \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_A f_k(t)dt.$$

Comme souvent avec les séries de fonctions l'hypothèse de domination sur la sommes partielles peut être délicate à vérifier, c'est pour cela qu'il existe une condition suffisante plus facile à vérifier :

Théorème

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$, continues par morceaux et intégrables sur A. On suppose que :

- *La série $\sum_n f_n$ est simplement convergente vers f continue par morceaux sur A.*
- *La série $\sum_{k=0}^{\infty} \int_A |f_k(t)|dt$ converge.*

Alors f est intégrable sur A et nous avons :

$$\int_A f(t)dt = \int_A \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_A f_k(t)dt.$$

Remarques-Exemples :

1. Il peut toutefois se produire que la série $\sum_n \int_I |f_n(t)|dt$ diverge, à ce moment pour justifier un éventuel échange $\sum \int = \int \sum$ ce théorème est inutilisable ; on peut parfois s'en sortir en essayant d'appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite $(g_n)_n$ des sommes partielles $(g_n = \sum_{1\leq k\leq n} f_k)$ (voir plus haut...).
2. Montrons que $$\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x}dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

On montre sans trop de difficultés (j'espère !) que l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x}dx$ est bien convergente. Comme pour $x \in [0,1[$: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$ nous avons $\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x}dx = -\int_0^1 \sum_{n\geq 0} x^n \log(x)dx$; posons $g_n(x) = -x^n \log(x) \in L^1([0,1]) \cap \mathscr{C}^0([0,1[)$. Une intégration par parties nous donne
$\int_0^1 |g_n(x)|dx = -\int_0^1 x^n \log(x)dx = \frac{1}{(n+1)^2}$: la série de terme général $\int_0^1 |g_n(x)|dx$ est bien convergente ce qui, vu le théorème précédent justifie l'échange $\sum \int = \int \sum$ et

$$\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x}dx = -\int_0^1 \sum_{n\geq 0} x^n \log(x)dx = -\sum_{n\geq 0}\int_0^1 x^n \log(x)dx$$
$$= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Via la caractérisation des limites par les suites, les théorèmes de convergence dominée fournissent des méthodes simples pour établir la régularité (continuité, dérivabilité) d'une fonction définie par une intégrale à paramètres (faire aussi observer que ces propriétés sont encore des échanges de limites) :

Théorème

(continuité d'une intégrale à paramètres). *Soit $f\ \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ (où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$) vérifiant les propriétés*

- *f est continue sur $\Omega \times I$.*
- *Il existe une fonction g intégrable sur I telle que*

$$|f(x,t)| \leq g(t), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times I.$$

Alors $F(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue sur Ω.

Remarque :

Encore une fois, une domination globale est en général impossible à obtenir ; mais il est bien sûr suffisant de travailler localement i.e. de dominer localement au voisinage de tout point $a \in \Omega$.

Et la version dérivation :

Théorème

(dérivabilité d'une intégrale à paramètres). *: Soit $f\ \ \Omega\times I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ (où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$) vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent. Si de plus f admet sur $\Omega\times I$ une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant elle aussi les hypothèses précédentes, alors $F(x)=\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et*

$$F'(x)=\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt,\quad \forall x\in I.$$

Exemple :

La célèbre fonction Gamma $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. L'intégrale généralisée est clairement (exercice !) convergente pour tout $x > 0$, la fonction gamma est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+^\star$. Etudions sa régularité, pour cela on pose $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ il est clair que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star)$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$: $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \log^k(t)t^{x-1}e^{-t}$ qui est bien (re-exercice) intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

• Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$ un segment, pour $x \in [a,b]$ nous avons : $0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1}$ si $0 < t \leq 1$ et $0 \leq t^{x-1} \leq t^{b-1}$ si $0 \leq t \geq 1$. Par conséquent $|f(x,t)| \leq (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ et le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres nous assure que Γ est continue sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$ donc sur $\mathbb{R}_+^\star$.

• Pour la dérivabilté, il faut procéder de même avec toutes les dérivées partielles de f et en raisonnant comme pour la continuité on a pour tout $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^\star$:
$|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)|\leq|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)|+|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(b,t)|\in L^1(\mathbb{R}_+)$. Ce qui nous donne la condition de domination sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^\star$: Γ est donc indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour tout entier $k\in\mathbb{N}$:
$\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^\infty \log^k(t)t^{x-1}e^{-t}dt$.