Du CapEM – Suites et Séries. 15/12/18.

1. Vrai-Faux Suites et Séries Numériques

Exercice 1. ***[VRAI-FAUX].*** *Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?*

(1) $0.9999\ldots = 1$.

(2) *La limite d'une suite réelle ou complexe convergente est unique.*

(3) *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles convergentes de limites respectives* $\ell < \ell'$ *; alors, à partir d'un certain rang :* $u_n < v_n$.

(4) *Si* $f\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une application injective, alors* $\lim_n f(n) = +\infty$.

(5) *Une suite arithmétique* $(a_n)_n$ *vérifiant* $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 100,$ *et* $a_{101} + a_{102} + \cdots + a_{200} = 200.$ *est de raison* $r = 0.1$.

(6) *Une suite d'entiers converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.*

(7) *La suite* $(u_n)_n$ *où* $u_n = \sin(n)$ *diverge*

(8) *On considère la suite de terme général* $a_n = (-1)^{n+1}n,\ (n \geq 1)$. *Alors la moyenne des* 200 *premiers termes vaut* $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{200}}{200} = -0.5$.

(9) *Si la suite* $(a_n)_n$ *est bornée, alors elle converge.*

(10) *Si les suites* $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *divergent, alors la suite* $(a_n + b_n)_n$ *diverge aussi.*

(11) *Si la suite* $(a_n)_n$ *converge et la suite* $(b_n)_n$ *diverge, alors la suite* $(a_nb_n)_n$ *diverge.*

(12) *Si* $\lim_n a_nb_n = 0$ *alors* $\lim_n a_n = 0$ *ou* $\lim_n b_n = 0$.

(13) *Si* $(a_n)_n$ *est une suite non bornée de réels positifs, alors* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(14) *Une suite à termes positifs qui converge vers* 0 *est décroissante à partir d'un certain rang.*

(15) *Si une suite de réels a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.*

(16) *Si* $(u_n)_n$ *converge vers un réel* ℓ *alors* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *convergent vers* ℓ.

(17) *Si* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *sont convergentes, il en est de même de* $(u_n)_n$.

(18) *Si* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *sont convergentes, de même limite* ℓ*, il en est de même de* $(u_n)_n$.

(19) *Soit* (u_n) *une suite complexe telle que* $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ *et* (u_{3n}) *convergent, alors* (u_n) *converge.*

(20) *Une suite* $(u_n)_n$ *réelle telle que* $(u_{2n})_n$ *converge est convergente.*

(21) *Une suite* $(u_n)_n$ *réelle croissante telle que* $(u_{2n})_n$ *converge est convergente.*

Contre-Exemples : 1. *Proposer un contre-exemple pour chacune des propriétés suivantes :*

(1) *Si la suite* $(a_n)_n$ *est non bornée, alors* $\lim_n |a_n| = +\infty$.

(2) *Si la suite* $(a_n)_n$ *est bornée, alors elle converge.*

(3) *Si les suites* $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *divergent, alors la suite* $(a_n + b_n)_n$ *diverge aussi.*

(4) *Si la suite* $(a_n)_n$ *converge et la suite* $(b_n)_n$ *diverge, alors la suite* $(a_nb_n)_n$ *diverge.*

(5) *Si* $\lim_n a_nb_n = 0$ *alors* $\lim_n a_n = 0$ *ou* $\lim_n b_n = 0$.

(6) *Si* $\lim_n a_n = 0$ *alors* $\sum_n a_n$ *converge.*

(7) *Si* $\lim_n na_n = 0$ *alors* $\sum_n a_n$ *converge.*

(8) *Si* $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$ *convergent, alors* $\sum_n a_nb_n$ *converge.*

(9) *Si* $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$ *divergent, alors* $\sum_n a_nb_n$ *diverge.*

(10) *Si* $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$ *divergent, alors* $\sum_n(a_n + b_n)$ *diverge.*

(11) *Si* $\sum_n a_n$ *converge et* $\sum_n b_n$ *diverge, alors* $\sum_n a_nb_n$ *diverge.*

(12) *Si* $\sum_n a_n$ *converge et si la suite* $(b_n)_n$ *est non bornée, alors* $\sum_n a_nb_n$ *diverge.*

(13) *Si* $\sum_n a_n$ *et* $\sum_n b_n$ *divergent et* $a_n < c_n < b_n$ *pour tout* n*, alors* $\sum_n c_n$ *diverge.*

(14) *Si* $a_n \geq 0$ *pour tout* n *et* $\lim_n a_n = 0$*, alors* $\sum_n(-1)^na_n$ *converge.*

2. Suites Numériques

Exercice 2. *Soit* $(r_n = p_n/q_n)_n$ *une suite de rationnels qui converge vers* $x \notin \mathbb{Q}$*. Montrer qu'alors* $\lim_n |q_n| = \pm\infty$.

Exercice 3. *Soit* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une application injective, montrer que* $\lim_n f(n) = +\infty$.

Exercice 4. (1) *Soit* $(u_n)_n \subset \mathbb{R}$ *une suite convergente de limite* $l \in \mathbb{R}$*. On pose* $v_n = u_n - l$ *et on suppose qu'il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} v_{n+1}^\alpha - v_n^\alpha = \lambda \neq 0.$$

Montrer que

$$u_n - l \underset{n\to\infty}{\sim} (n\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}\ .$$

(2) ***Application :*** *Soit la suite définie par* $0 < u_0 \leq 1$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$*, justifier la convergence de* $(u_n)_n$ *et déduire de ce qui précède que* $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Exercice 5. *On considère les deux suites* (u_n) *et* (v_n) *définies par*

$$u_0 = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \ \text{et}\ v_n = \frac{7}{u_n}.$$

(1) *Calculer* u_1, u_2, v_0, v_1 *et* v_2 *sous forme de fraction irréductible.*
(2) *Montrer que pour tout entier* n, $u_n > 0$ *et* $v_n > 0$.
(3) *Montrer que pour tout entier* n *on a*

$$(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2, \quad \text{puis}\ u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2.$$

(4) *En déduire que pour tout entier* n, $u_n \geq v_n$.
(5) *Étudier la monotonie de chacune des suites* (u_n) *et* (v_n).
(6) (a) *Montrer que pour tout* $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{21}{8}$.
    (b) *En déduire que pour tout entier* n, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.
    (c) *Montrer que pour tout entier* n, $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n - 1}}$*. En déduire la convergence et la limite de la suite* $(u_n - v_n)$.
(7) *Montrer que les suites* (u_n) *et* (v_n) *convergent vers la même limite. Déterminer cette limite.*
(8) *Déterminer une valeur approchée rationnelle de* $\sqrt{7}$ *à* 10^{-3} *près.*

Exercice 6. *On définit la suite* $(u_n)_n$ *par* $u_0 = 5$ *et* $u_{n+1} = u_n + 1/u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(1) *Montrer que* $(u_n)_n$ *est strictement monotone.*
(2) *Montrer que* $\lim_n u_n = +\infty$.
(3) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1}^2 = 2 + u_n^2 + 1/u_n^2$.
(4) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n^2 = 25 + 2n + \frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{u_1^2} + \cdots + \frac{1}{u_{n-1}^2}$.
(5) *En déduire que* $u_n \geq \sqrt{25 + 2n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$.
(6) *On pose* $f(t) = \frac{1}{25+2t}$*, dé déduire des questions précédentes que* $u_n^2 \leq 25 + 2n + f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$.
(7) *Montrer que* $u_n^2 \leq 25 + 2n + \int_{-1}^{n-1} f(t)dt$.
(8) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt{25 + 2n} < u_n < \sqrt{25 + 2n + \log\sqrt{\frac{2n+23}{23}}}$.
(9) *Montrer que* $45 < u_{1000} < 45,1$.
(10) *Donner un équivalent de* u_n.

Exercice 7. *Soit* $a > 0$*. On définit la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *par* u_0 *un réel vérifiant* $u_0 > 0$ *et par la relation*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On se propose de montrer que (u_n) *tend vers* $\sqrt{a}$.

(1) *Montrer que*

$$u_{n+1}{}^2 - a = \frac{(u_n{}^2 - a)^2}{4u_n{}^2}.$$

(2) *Montrer que si* $n \geq 1$ *alors* $u_n \geq \sqrt{a}$ *puis que la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*

(3) *En déduire que la suite* (u_n) *converge vers* $\sqrt{a}$.

(4) *En utilisant la relation* $u_{n+1}{}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ *donner une majoration de* $u_{n+1} - \sqrt{a}$ *en fonction de* $u_n - \sqrt{a}$.

(5) *Si* $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ *et pour* $n \geq 1$ *montrer que*

$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}.$$

(6) *Application : Calculer* $\sqrt{10}$ *avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant* $u_0 = 3$.

Exercice 8. *Montrer que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_0A_k = \frac{4}{\pi}$, *où* $A_0, \ldots, A_n$ *sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité.*

Exercice 9. *On pose pour* $n \geq 1$: $u_n = \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}$. *Montrer que la suite* $(u_n)_n$ *converge vers* $3/8$.

3. Séries numériques

Exercice 10. *Déterminer la nature (convergence, convergence absolue) des séries :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right), \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{n^n},$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n\ln(\cos(\pi/n))}{\ln^2(n)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right), \qquad \sum_{n\geq 1} n^{-\tan(\pi/4+1/n)},$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\sum_{k=1}^n 1/k}{\ln(n!)}, \qquad \sum_{n\geq 2} (-1)^n n^\alpha \left(\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^\beta, \qquad \sum_{n} \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right).$$

Exercice 11. *On considère la suite* $(a_n)_n$ *définie par* $a_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,dt,\ n \in \mathbb{N}$.

(1) *Quelle est la nature de la série* $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$?

(2) *Pour* $n \geq 1$ *montrer que* $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}dt + (-1)^{n+1}\int_0^1 t^n \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}dt$.

(3) *Montrer que pour tout* $n \geq 1$: $0 \leq \int_0^1 t^n\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+1}$.

(4) *En déduire que* $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t}dt = \frac{\pi}{2} - 1$.

(5) *Montrer qu'il existe une fraction rationnelle* R *vérifiant* $a_n = R(n)a_{n-2}, \quad \forall\, n \geq 2$.

(6) *Montrer que* $a_n \underset{+\infty}{\sim} a_{n-1}$.

(7) *Montrer que la suite de terme général* $n(n+1)(n+2)a_na_{n-1}$ *est constante de valeur* $C > 0$.

(8) *En déduire que* $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{C}}{n^{3/2}}$ *puis la nature de la série* $\sum_n a_n$.

(9) *Montrer que pour tout* $n \geq 0$: $a_n = w_{n+2} - w_n$ *où* $w_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta)d\theta$.

(10) Montrer que $\lim_n w_n = 0$.

(11) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n = \frac{\pi}{2} + 1$.

Exercice 12. *Convergence et somme de la série de terme général* $u_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$, $n \geqslant 0$ *(on pourra commencer par montrer que* $_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$*...).*

Exercice 13. *On pose pour* $n \in \mathbb{N}$: $R_n = \displaystyle\sum_{k\geq n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.

(1) *Montrer que* $\lim_n R_n = 0$.

(2) *Montrer que* $R_{n+1} + R_n = \displaystyle\sum_{k\geq n+1} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

(3) *Montrer que* $R_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + O(1/n^2)$.

(4) *En déduire la nature de la série de terme général* R_n.

Exercice 14. *Déterminer tous les polynômes* $P \in \mathbb{R}[x]$ *tels que la série de terme général*

$$a_n = \left(n^{15} - \frac{n^{14}}{14} + \frac{n^5}{5}\right)^{1/15} - \sqrt[3]{P(n)}$$

converge.

Exercice 15. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Déterminer la nature de la série*

$$\sum_{n\geq 1} \big(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\big).$$

Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 16. (1) *Quelle est la nature de la série de terme général* $a_n = 1/n\ln(n)$ *?*

(2) *Calculer une primitive de* $x \mapsto 1/x^2\ln^2(x)$.

(3) *Pour* $n \geq 2$ *on pose* $a_n = 1/n\ln^2$, $S_n = \sum_{k=2}^n a_k$. *Montrer que la suite* $(S_n)_n$ *est croissante puis majorée.*

(4) *Montrer que la série de terme général* a_n *converge. On note* S *sa somme.*

(5) *Donner un encadrement de* $R_n = \sum_{k\geq n+1} a_k$

(6) *Montrer que* $|S - S_n| \leq 0.01$ *implique* $n \geq 10^{43}$.

(7) *Donner une valeur approchée de* S *avec une erreur inférieure à* 0.003.

(8) *Quelle est la nature de la série de terme général* $a_n = 1/n^\alpha \ln^\beta(n)$ *(séries de Bertrand) ?*

Exercice 17.

(1) *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 0} 1/(3n)!$ *est convergente.*

(2) *Calculer pour tout entier* k : $1 + j^k + j^{2k}$ *où* $j = \exp(2i\pi/3)$.

(3) *En déduire que* $\sum_{n\geq 0} 1/(3n)! = (e + 2e^{-1/2}\cos(\sqrt{3}/2))/3$.

Exercice 18.

(1) *Montrer que pour tout entier* $n \geq 2$: $n!e = 2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n+1)!} + \sum_{k\geq n+2} \frac{n!}{k!}$.

(2) *Montrer que* $e = \sum_{k\geq 0} 1/k! \notin \mathbb{Q}$.

(3) *Montrer que si* $n \geq 4$: $2n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!}$ *est un entier pair.*

(4) *Montrer que pour* $n \geq 2$: $0 \leq \sum_{k\geq n+2} \frac{n!}{k!} \leq \frac{2}{(n+1)!}$.

(5) *En déduire la nature (DV, SCV, ACV) de la série de terme général* $a_n = \sin(\pi e n!)$.

Exercice 19.

Exercice 20. *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\log n)}{n}$ *diverge*

(1) *en estimant somme sur des blocs ou le cosinus est* $\geq \sqrt{2}/2$...

(2) *A l'aide de la formule* $\int_n^{n+1} f(t)dt = f(n) + \int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)dt$.

DuCapEM – Devoir 4. 15/12/18.

A rendre au plus tard le 7 Janvier 2019.

Problème 1. *On va étudier dans ce devoir la* **constante d'Euler-Mascheroni** *:*

$$\gamma := \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n)\right)=\lim_{n\to+\infty}(H_n-\log(n))$$

où $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},\ n\geq 1$ *est le n-ième nombre harmonique.*

(1) ***(existence de gamma, preuve classique)****. on pose pour* $n\geq 1$ *:* $a_n = H_n-\log(n)$.

(a) *Montrer que la suite* $(a_n)_n$ *est décroissante.*

(b) *Montrer que* $H_n-1<\log(n)<H_n-1/n,\ n\geq 1$.

(c) *Montrer que* $0<a_n<1$.

(d) *En déduire que* γ *existe et* $0\leq\gamma\leq 1$.

(2) ***(existence de gamma, preuve plus sportive)****.*

(a) *Montrer que* $\int_{1/n+1}^{1/n}\log(t)dt = \frac{1}{n(n+1)}\left(\log\left(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)-1\right)$

(b) *Montrer que pour tout* $n\geq 1$*, il existe* $\frac{1}{n+1}<c_n<\frac{1}{n}$ *tel que* $\int_{1/n+1}^{1/n}\log(t)dt=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\log(c_n)$.

(c) *On pose* $b_n := 1/nc_n$. *Montrer que* $\lim_n b_n = 1$.

(d) *Montrer que* $e = b_n(1+1/n)^n$.

(e) *Montrer que* $1=\log(b_n)+n[\log(n+1)-\log(n)]$.

(f) *En déduire que* $H_n = \log\left(b_1b_2^{1/2}b_3^{1/3}\dots b_n^{1/n}\right)+\log(n+1) := d_n+\log(n+1)$.

(g) *Montrer que la suite* $(d_n)_n$ *est croissante et* $d_n<\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}$.

(h) *En déduire que* γ *existe et* $0<\gamma\leq\pi^2/6$.

(3) ***(existence de gamma, preuve trapézoïdale)****.*

(a) *En appliquant la méthode des trapèzes, montrer que pour tout* $k\geq 2$*, il existe* $k-1<\xi_k<k$ *tel que* $\int_{k-1}^k\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}\right)-\frac{1}{6\xi_k^3}$.

(b) *En déduire que* γ *existe et* $\gamma=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{\xi_k^3}$.

(c) *En comparant avec une intégrale, montrer que pour tout* $n\geq 2$ *:* $\dfrac{1}{12(n+1)^2}<\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{\xi_k^3}<\dfrac{1}{12(n-1)^2}$.

(d) *En déduire un encadrement de* γ *en fonction de la* **constante d'Apery** $\zeta(3)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$.

(e) *Retrouver les équivalents des questions (5) et (6) à l'aide des estimations démontrées dans cette question.*

(4) *(quelques formes intégrales de* γ*).*

(a) *Montrer que* $H_n=\int_0^1\frac{1-(1-t)^n}{t}dt,\ (n\geq 1)$. *En déduire que* $\gamma=\displaystyle\int_0^1\frac{1-e^{-t}}{t}dt-\int_1^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt$.

(b) *Avec la question précédente, montrer que* $\int_0^\infty e^{-t}\log(t)dt=\gamma$.

(c) *Montrer que* $\int_0^1\log(-\log(t))dt=-\gamma$.

(5) ***(accélération de la convergence)*** *Dans cette dernière partie on montre qu'une légère modification de* a_n *améliore notablement sa convergence vers* γ *; plus précisément si on pose* $b_n = H_n-\log(n+\frac{1}{2})$ *montrons que* $b_n-\gamma\sim 1/24n^2$.

(a) *Montrer que* $b_n-b_{n+1}=f(n)$ *où* $f(x)=-\frac{1}{x+1}+\log(x+\frac{3}{2})-\log(x+\frac{1}{2})$.

(b) *Montrer que pour tout* $x>0$ *:* $\frac{1}{4(x+1)^4}<-f'(x)<\frac{1}{4(x+\frac{1}{2})^4}$.

(c) *En déduire que* $f(k)<\frac{1}{12(k+\frac{1}{2})^3}$. *En écrivant* $b_n-\gamma=\sum_{k\geq n}b_{k+1}-b_k$ *montrer que* $b_n-\gamma<\frac{1}{24n^2}$.

(d) *De même montrer que* $b_n-\gamma>\frac{1}{24(n+1)^2}$ *et conclure.*

Exercice 21. *On propose dans cet exercice une preuve simple (Velleman, 2016) de la célèbre formule d'Euler :*

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)dt, \qquad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)dt.$$

(1) *Calculer I_0 et J_0.*

(2) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:* $I_n = \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.

(3) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:* $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

(4) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:* $\dfrac{1}{n^2} = 2\left(\dfrac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - \dfrac{J_n}{I_n}\right)$.

(5) *En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 2\frac{J_N}{I_N}$.

(6) *Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$:* $x \leq \dfrac{\pi \sin(x)}{2}$.

(7) *En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$:* $0 \leq J_N \leq \dfrac{\pi^2}{4}(I_N - I_{N+1})$.

(8) *En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$:* $0 \leq J_N \leq \dfrac{\pi^2 I_N}{4(2N+2)}$

(9) *En déduire que :* $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *et conclure.*