L2 Maths – Sept.2020.

Principaux développements limités à connaitre parfaitement.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x).$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x).$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).$$

Exercice 1. *Calculer d'au moins six manières différentes le développement limité à l'ordre* 3 *à l'origine de la fonction tangente*

Exercice 2. *(1) Montrer que le DL à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = x/\sin(x)$ *est* $1+x^2/6+7x^4/360+o(x^4)$.

(2) Montrer que le DL à l'ordre 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = 1/\cos(x)$ *est* $1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)$.

(3) Montrer que le DL à l'ordre 4 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \exp(\sin(x)/x)$ *est* $e(1 - x^2/6 + x^4/45) + o(x^4)$.

(4) Montrer que le DL à l'ordre 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = \arcsin(\pi\sin(x))$ *est* $\pi x + (\pi^3 - \pi)x^3/6 + o(x^3)$.

(5) Montrer que le DL à l'ordre 1 *au voisinage de* $\pi/4$ *de* $f(x) = \arctan(x))$ *est* $\arctan(\pi/4)+16(x-\pi/4)/(16+\pi^2) + o(x - \pi/4)$.

(6) Montrer que le DL à l'ordre 3 *au voisinage de* 0 *de* $f(x) = argsh(1 + 2x + 3x^2)$ *est* $\log(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x^3/3 + o(x^3)$.

(7) Montrer que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$.

Exercice 3. ***[développements limités supplémentaires].*** *Montrer que*

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}$, 2) $\lim_{x\to 2_+}\left(2^x+3^x-12\right)^{\tan(\pi x/4)}=\exp\left[-\frac{4}{\pi}\left(4\log(2)+9\log(3)\right)\right]$,

3) $\lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{\mathrm{t}^2+\mathrm{t}})-\mathrm{sh}(\sqrt{\mathrm{t}^2-\mathrm{t}})}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t^2}-\frac{t^6}{6}\log^2(t)}=\frac{e-1}{2}$, 4) $\lim_{n\to+\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}=1$,

5) $\lim_{x\to 5}(6-x)^{1/(x-5)}=e^{-1}$, 6) $\lim_{x\to 1}\frac{\arctan\left(\frac{\mathrm{x}^2-1}{\mathrm{x}^2+1}\right)}{x-1}=1$,

7) $\lim_{x\to 0_+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin(1/x)\right)^x=1$, 8) $\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\log(x)}=-2$,

9) $\lim_{x\to 0_+}\frac{x^x-(\sin x)^{\sin x}}{x^3}=-\infty$, 10) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\arctan^3(x)}\left(\log(\log(e+x))-\frac{x}{x+e}\right)=\frac{1}{6e^3}$,

11) $\lim_{x\to e}\frac{e^x-x^e}{\log(x)-\log_x(e)}=0$, 12) $\lim_{x\to+\infty}x\left(\arctan(\mathrm{x})-\frac{\pi\mathrm{x}+1}{2\mathrm{x}+1}\right)=\frac{\pi-6}{4}$,

13) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{1/\sin(x)}=1$, 14) $\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ex^3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{e}{8}$,

15) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2(x)}\right)^x=\frac{2}{3}$, 16) $\lim_{x\to+\infty}x\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}-\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x/2}\right)=\frac{15e^{3/2}}{8}$,

17) $\lim_{x\to+\pi/2_+}\cos(x)\exp\frac{1}{1-\sin(x)}=-\infty$,

11) $\lim_{x\to 1}\left(4\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)-x\right)^{1/(1-x)}=\exp(1-\pi/\sqrt{3})$, 18) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log(x+1)}{\log(x)}\right)^{x\log(x)}=e$,

19) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sh(x)}}{x}\right)^{\mathrm{argsh(x)/(sh(x)-x)}}=e$, 20) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+2x+2x^2)}{\log(1+2x+3x^2)}\right)^{1/(e^x-1)}=1/\sqrt{e}$.

26 septembre 2020. Lassère Patrice : Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, .
Mèl : lassere@math.univ-toulouse.fr, Ouèb page : https://perso.math.univ-toulouse.fr/lassere/