Leçon 6

Guide pratique de mesure et intégration

Cette leçon n'est pas un récapitulatif des rappels de la théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue présentés dans les leçons précédentes. Elle essaie plutôt de mettre l'accent sur des arguments récurrents et pratiques, en vue d'une utilisation souple et efficace dans le calcul des probabilités.

Il n'y a pas d'ordre réellement précis dans les propriétés mises en avant ci-dessous. Certaines renvoient directement aux énoncés dans les leçons précédentes.

Sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, rappeler donc l'intégrable

$$\int_X f \, d\mu$$

d'une fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (ou $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$) par rapport à μ. Si f est à valeurs positives (éventuellement infinies), cette intégrale est définie, éventuellement infinie. Si f est à valeurs quelconques, il convient de supposer que f est intégrable au sens où $\int_X |f| d\mu < \infty$. En particulier alors $|f| < \infty$ μ-presque partout ainsi qu'explicité plus bas.

Les fonctions f et g considérées dans les propriétés suivantes sont toutes deux des fonctions mesurables sur $(X, \mathcal{A})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

a) Partie de mesure nulle. Si $\mu(A) > 0$, $A \in \mathcal{A}$, alors A n'est pas vide. La remarque est élémentaire, mais en fait pas si anodine pour de nombreuses applications.

b) Linéarité de l'intégrale et relation de Chasles. L'intégrale est linéaire et vérifie la relation de Chasles : si f, g sont intégrables, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est intégrable et

$$\int_X [\alpha f + \beta g] \, d\mu \, = \, \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu.$$

Si A et B sont disjoints dans $\mathcal{A}$,

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu \;=\; \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

Plus généralement si A_n, $n \in \mathbb{N}$, est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux et de réunion A, alors

$$\int_A f\,d\mu \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f\,d\mu.$$

Il suffit en fait que $\mu(A) = \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)$.

c) Conservation de l'ordre. Si $f \geq 0$ μ-presque partout, alors $\int_X f\,d\mu \geq 0$. En particulier, si f et g sont intégrables et $g \leq f$ μ-presque partout,

$$\int_X g\,d\mu \;\leq\; \int_X f\,d\mu.$$

En particulier,

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \;\leq\; \int_X |f|\,d\mu$$

qui s'interprète aussi comme une inégalité triangulaire (pour l'intégrale qui est une somme).

d) Une fonction positive d'intégrale nulle est nulle presque partout. Si $f \geq 0$ μ-presque partout et $\int_X f d\mu = 0$, alors $f = 0$ μ-presque partout. (Bien entendu, si $f = 0$ μ-presque partout, alors $\int_X f d\mu = 0$.)

e) Deux fonctions égales presque partout ont même intégrale. Si f est intégrable et si $\mu(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$, alors $\int_A f d\mu = \int_X (\mathbb{1}_A f) d\mu = 0$. En particulier, si f et g sont deux fonctions intégrables égales μ-presque partout, alors

$$\int_X f\,d\mu \;=\; \int_X g\,d\mu.$$

f) Une fonction intégrable est finie presque partout. Si $\int_X |f| d\mu < \infty$, alors $|f| < \infty$ μ-presque partout. En effet, s'il est supposé que $\mu(|f| = \infty) > 0$, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\infty > \int_X |f| \, d\mu \geq \int_{\{|f|=\infty\}} |f| \, d\mu \geq n\mu\big(|f| = \infty\big)$$

(car, par conservation de l'ordre, $|f| \geq n$ sur l'ensemble $\{|f| = \infty\}$) ce qui fournit une contraction quand $n \to \infty$. En particulier si f est intégrable à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, f est en fait μ-presque partout à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Attention, « finie » ne veut pas dire « bornée », par exemple la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, 1]$ mais n'est pas bornée.

g) Théorèmes de convergence monotone et dominée (Leçon 3).

h) Théorème de Fubini-Tonelli (Leçon 4).

i) Intégration par rapport à une mesure discrète ou à densité. Si μ est une mesure sur un ensemble X fini ou dénombrable, muni de la σ-algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ de ses parties, pour toute fonction $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, positive ou intégrable,

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{x \in X} f(x)\mu\big(\{x\}\big)$$

(avec la convention $0 \times \infty = 0$). La mesure μ se représente comme $\mu = \sum_{x \in X} \mu(\{x\}) \, \delta_x$.

Si μ est une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$ de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue λ, pour toute fonction $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, positive ou intégrable,

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} gf \, d\lambda.$$

j) Inégalité de Jensen. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse totale égale à 1, $\mu(X) = 1$; soit $\phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et soit f une fonction mesurable sur $(X, \mathcal{A})$ à valeurs dans I, intégrable et telle que $\phi(f)$ est intégrable également ; alors

$$\phi\Big(\int_X f \, d\mu \Big) \;\leq\; \int_X \phi(f) \, d\mu.$$

k) Comparaison avec l'intégrale de Riemann (Leçon 3). Si l'intégrale de Lebesgue est un progrès vis-à-vis de l'intégrale de Riemann, il ne faut pas pour autant oublier cette dernière qui fournit le calcul différentiel et intégral, et permet notamment le calcul d'intégrales par les primitives.

De manière pratique, si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, de primitive F, alors f est intégrable au sens de Lebesgue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $[a, b]$, et

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda \;\; \Big(= \int_a^b f(x) dx \Big) \;=\; F(b) - F(a).$$

Une fois l'identification possible, les outils du calcul intégral de Riemann sont à disposition pour étudier des intégrales de Lebesgue, à la fois sur des intervalles fermés bornés, mais aussi sur des intervalles infinis (intégrales impropres). Par exemple, il peut ainsi être vérifié que la fonction

$$f(x) \;=\; x^{\beta} \, e^{-\alpha x}, \quad x \in \,]0, \infty[,$$

est intégrable (au sens de Lebesgue) sur $]0, \infty[$ si (et seulement si) $\beta > -1$ et $\alpha > 0$.

l) Formule du changement de variable (Leçon 4).