Leçon 10

Description d'une loi de probabilité

1. Fonction de répartition
2. Intégrale de fonctions boréliennes
3. Fonction caractéristique
4. Transformée de Laplace
5. Complément : Formule d'inversion de Fourier

Exercices

L'objet de cette leçon est de présenter quelques outils pour décrire la loi d'une variable, ou d'un vecteur, aléatoire. La fonction de répartition a déjà été mise en œuvre dans cette optique dans la Leçon 7 sur les mesures de probabilités. D'autres descriptions sont introduites et développées ici, avec le langage des variables et vecteurs aléatoires.

Les variables aléatoires de cette leçon sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

1 Fonction de répartition

La fonction de répartition de la loi d'une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est simplement la fonction de répartition de sa loi $\mathbb{P}_X$ qui définit une mesure de probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$ (voir Leçon 8).

Proposition 1. *La fonction de répartition de la loi d'une variable aléatoire réelle $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est la fonction de répartition de sa loi $\mathbb{P}_X$ définie par*

$$F_X(t) = \mathbb{P}_X\big(]-\infty, t]\big) = \mathbb{P}(X \leq t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La fonction de répartition F_X caractérise la loi de X : si X et Y sont deux variables aléatoires réelles telles que $F_X = F_Y$, alors X et Y ont la même loi.

La notation F_X est quelque peu abusive car F_X caractérise la loi $\mathbb{P}_X$ de X (et non la variable X elle-même, et il existe des variables aléatoires différentes de même loi). Mais à nouveau, maîtriser la notation et sa signification est très instructif et efficace pour les développements ultérieurs.

Il est quelquefois bénéfique de travailler avec l'« anti-fonction de répartition », $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Par exemple, si X est de loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ de paramètre $\alpha > 0$, il est plus simple d'observer que $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$. De la même manière, une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$,

$p \in]0,1[$, est caractérisée par $\mathbb{P}(X \geq k) = (1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, car $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$. L'anti-fonction de répartition est aussi bien adaptée pour décrire la loi d'un minimum de deux (ou de plusieurs) variables aléatoires X et Y puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\big(\min(X,Y) > t\big) \ = \ \mathbb{P}(X > t, Y > t)$$

(notamment en situation d'indépendance – voir Leçon 12).

La notion de fonction de répartition de la loi d'un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ recopie la définition du cas réel, même si elle est peut-être un peu moins utile dans le cadre vectoriel. Si $X = (X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$, sa fonction de répartition est définie, pour tout $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, par

$$\begin{aligned} F_X(t) \ &= \ \mathbb{P}_X\big(]-\infty, t_1] \times \cdots \times]-\infty, t_d]\big) \\ &= \ \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \ldots, X_d \leq t_d). \end{aligned}$$

Elle détermine la loi du vecteur (puisqu'elle fournit les mesures des rectangles qui engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$). Si $t_2, \ldots, t_d \to \infty$, F_X détermine la fonction de répartition F_{X_1} de la première coordonnée, et donc sa loi (idem pour les autres coordonnées). Comme déjà développé dans la Leçon 8, la loi du vecteur détermine donc les lois marginales (la réciproque est fausse en général), et l'outil de la fonction de répartition est donc un moyen de s'en convaincre.

Suivant le cas, les méthodes détaillées sur la fonction de répartition dans la Leçon 7 permettent de décomposer la loi d'une variable aléatoire réelle en parties discrète et à densité.

2 Intégrale de fonctions boréliennes

La caractérisation décrite dans ce paragraphe paraît plus lourde que la fonction de répartition, mais en fait s'avère très souple dans les illustrations.

Si X est une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$, par le théorème de transport, pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne, positive ou bornée,

$$\mathbb{E}\big(\phi(X)\big) \, = \, \int_{\mathbb{R}} \phi \, d\,\mathbb{P}_X.$$

L'adjectif « bornée » est choisi pour assurer de façon commode l'existence des intégrales (car $\mathbb{P}$ est de probabilité). Le cas des indicatrices couvre les deux situations (positive et bornée).

Il est clair que la connaissance de la famille de ces intégrales, lorsque ϕ varie, suffit à décrire la loi $\mathbb{P}_X$ de X, simplement parce que si $\phi = \mathbb{1}_B$ est l'indicatrice d'un borélien B,

$$\mathbb{E}(\phi(X)) \, = \, \mathbb{P}(X \in B) \, = \, \mathbb{P}_X(B).$$

Ou encore, si B parcourt les intervalles $]-\infty, t]$, $t \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition F_X est incluse dans cette description.

La famille de toutes les intégrales semble bien trop ample en comparaison. À l'inverse, il convient néanmoins d'utiliser une famille suffisamment riche de fonctions ϕ pour caractériser une loi, au moins indexée par un paramètre réel (ou rationnel), comme pour la fonction de répartition ou la fonction caractéristique du Paragraphe 3 ci-dessous. Par exemple, il n'est pas vrai en général que l'espérance $\mathbb{E}(X)$ ou la variance $\mathrm{Var}(X)$ (quand elles existent), ou les deux, caractérisent la loi d'une variable aléatoire X. La famille de tous les moments $\mathbb{E}(X^n)$, $n \in \mathbb{N}$, (s'ils existent) est éventuellement une candidate ; elle sera discutée en fin de leçon.

Si la description précédente semble donc très (trop) générale, et ne pas apporter grand chose, partir à l'aveugle dans le calcul de $\mathbb{E}(\phi(X))$ en utilisant les données de la question étudiée et le calcul intégral est souvent très profitable, et permet d'identifier aisément, et explicitement, la loi $\mathbb{P}_X$ de X à travers la réprésentation $\mathbb{E}\big(\phi(X)\big) = \int_{\mathbb{R}} \phi \, d\,\mathbb{P}_X$. Cette méthode sera appliquée de manière assez systématique au long des leçons.

Voici une illustration élémentaire : soit U une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ sur l'intervalle $(0,1)$; déterminer la loi de $X = \tan(\frac{\pi}{2}(2U-1))$. Pour toute fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne, positive ou bornée,

$$\mathbb{E}\big(\phi(X)\big) \,=\, \mathbb{E}\Big(\phi\big(\tan(\tfrac{\pi}{2}\,(2U-1))\big)\Big) \,=\, \int_{(0,1)} \phi\big(\tan(\tfrac{\pi}{2}\,(2u-1)\big)d\lambda,$$

la seconde égalité résultant du théorème de transport pour la loi (connue) de U appliqué à la composition $\phi(\tan(\frac{\pi}{2}(2u-1)))$. Il ne reste plus qu'à appliquer le changement de variable $x = \tan(\frac{\pi}{2}(2u-1))$ pour obtenir que

$$\mathbb{E}\big(\phi(X)\big) \,=\, \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,d\lambda.$$

Sur cette écriture apparaît clairement que la loi de X a pour densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: c'est la loi dite *de Cauchy*.

Ce calcul est à comparer à ce que fournit la fonction de répartition. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_X(t) \,=\, \mathbb{P}(X \leq t) \,=\, \mathbb{P}\big(\tan(\tfrac{\pi}{2}(2U-1)) \leq t\big).$$

En inversant la fonction tangente, pour $t \in \mathbb{R}$,

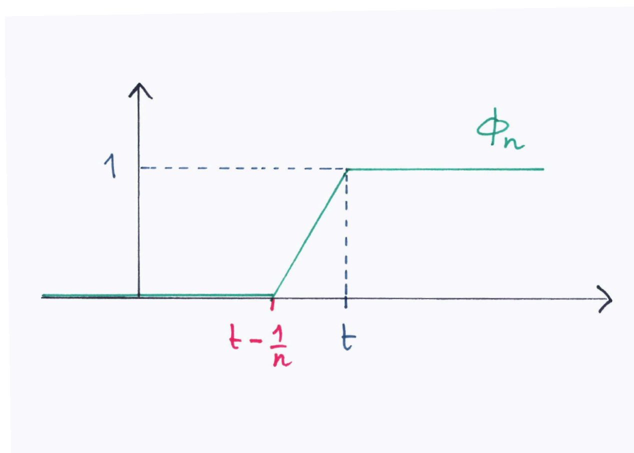
$$F_X(t) \,=\, \mathbb{P}\big(U \leq \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{2}{\pi}\arctan(t))\big) \,=\, \tfrac{1}{2}\big(1 + \tfrac{2}{\pi}\arctan(t)\big)$$

puisque U est uniforme sur $(0,1)$. Il n'est pas tout à fait immédiat de détecter la loi de Cauchy sur cette formulation, et il faut dériver la fonction de répartition pour voir apparaître cette densité.

Très souvent, notamment pour appliquer plus confortablement le calcul différentiel avec les intégrales de Riemann, il est avantageux de considérer des fonctions ϕ qui sont en outre continues. La famille des espérances $\mathbb{E}(\phi(X))$ pour $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue positive ou bornée caractérise en effet encore la loi de X. Il est facile de s'en convaincre en approchant les indicatrices $\phi = \mathbb{1}_{]-\infty,t]}$,

$t \in \mathbb{R}$, qui déterminent la fonction de répartition (et donc la loi), par des fonctions continues en posant par exemple, à $t \in \mathbb{R}$ fixé et pour $n \geq 1$,

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq t - \frac{1}{n}, \\ n(x-t)+1 & \text{si} \quad t - \frac{1}{n} \leq x \leq t, \\ 1 & \text{si} \quad x \geq t. \end{cases}$$



Ces fonctions ϕ_n, $n \geq 1$, sont continues (positives et bornées), et par convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\phi_n(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{]-\infty,t]}(X)) = F_X(t)$.

Des arguments plus développés permettent de se convaincre que la famille des fonctions de classe C^∞ à support compact est encore suffisante pour caractériser les lois.

Ce qui précède s'applique de la même façon aux lois de vecteurs aléatoires $X = (X_1, \ldots, X_d)$. Mais le fait que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ est le produit des tribus des coordonnées apporte un aspect supplémentaire : plutôt que de considérer $\mathbb{E}(\phi(X))$ pour $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ borélienne, il suffit de considérer ϕ sous forme d'un produit de fonctions réelles. Autrement dit, la loi d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)$ est décrite par les intégrales

$$\mathbb{E}\big(\phi_1(X_1) \cdots \phi_d(X_d)\big)$$

où les $\phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, d$, sont boréliennes (continues), positives ou bornées (puisque, par le théorème de transport pour la loi du vecteur X,

$$\mathbb{E}\big(\phi_1(X_1) \cdots \phi_d(X_d)\big) \;=\; \mathbb{E}\big((\phi_1 \cdots \phi_d)(X)\big) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} \phi_1 \cdots \phi_d \, d\,\mathbb{P}_X$$

et que, par exemple, le choix de $\phi_1 = \mathbb{1}_{B_1}, \ldots, \phi_d = \mathbb{1}_{B_d}$ pour des boréliens $B_1, \ldots, B_d$ détermine $\mathbb{P}_X$ sur tous les rectangles $B_1 \times \cdots \times B_d$, et donc sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ engendrée par ces rectangles). Comme précédemment, si les fonctions $\phi_2, \ldots, \phi_d$ sont égales à la fonction constante 1, l'expression précédente se réduit à $\mathbb{E}(\phi_1(X_1))$ décrivant la loi de la marginale X_1 (idem pour les autres coordonnées). Il sera vu plus loin, dans la Leçon 12 , que cette description est particulièrement efficace pour mettre en évidence des propriétés d'indépendance.

3 Fonction caractéristique

Si la famille des espérances $\mathbb{E}(\phi(X))$ pour $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, positive ou bornée (ou même de classe C^∞ à support compact), suffit à décrire la loi d'une variable aléatoire réelle X, il est naturel de ce demander jusqu'où il est possible de réduire la famille considérée. La transformation de Fourier, ou fonction caractéristique, indique qu'il suffit en fait de considérer des fonctions sinus et cosinus.

La définition peut être présentée sans difficulté immédiatement pour des vecteurs aléatoires. Si $u = (u_1, \ldots, u_d)$ et $v = (v_1, \ldots, v_d)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^d$, $\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^d u_k v_k$ est leur produit scalaire.

Définition 2 (Fonction caractéristique)**.** *La fonction caractéristique de la loi d'un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est la fonction*

$$\varphi_X(u) \;=\; \mathbb{E}\big(e^{i\langle u, X\rangle}\big) \;=\; \mathbb{E}\big(\cos(\langle u, X\rangle)\big) + i\,\mathbb{E}\big(\sin(\langle u, X\rangle)\big), \quad u \in \mathbb{R}^d.$$

La fonction caractéristique est toujours bien définie, les fonctions sinus et cosinus étant continues et bornées, et elle est ainsi bornée de la même façon. Noter que $\varphi_X(0) = 1$ (qui est toujours un petit test de vérification de calcul). Comme pour la fonction de répartition, la notation φ_X ne retient que la variable ou le vecteur aléatoire, mais c'est bien une fonction de la loi comme en témoigne le théorème de transport

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\big(e^{i\langle u,X\rangle}\big) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u,x\rangle} d\,\mathbb{P}_X, \quad u \in \mathbb{R}^d$$

(l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes n'étant donc rien d'autre que le couple des intégrales des parties réelle et imaginaire). La fonction caractéristique est alors aussi appelée *transformation, ou transformée, de Fourier*[1] de la mesure (loi) $\mathbb{P}_X$.

Si la loi $\mathbb{P}_X$ du vecteur aléatoire X admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$, la fonction caractéristique prend la forme

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u,x\rangle} f(x) d\lambda(x), \quad u \in \mathbb{R}^d.$$

Il s'agit alors de la transformée de Fourier de la fonction f (à des conventions de signe et de normalisation près), notée d'ordinaire $\widehat{f}$. Le point de vue de la transformée d'une mesure est plus riche, et couvre cette situation particulière. La transformation de Fourier d'une mesure (signée) sur les entiers relatifs est quant à elle liée aux séries de Fourier.

Un théorème approfondi assure que la fonction caractéristique « caractérise » la loi.

Théorème 3. *Si X et Y sont deux vecteurs aléatoires tels que $\varphi_X = \varphi_Y$, alors X et Y ont la même loi.*

1. Joseph Fourier, mathématicien et physicien français (1768–1830).

C'est un bon exercice que de calculer les fonctions caractéristiques des lois classiques. En voici une brève compilation (la variable $u \in \mathbb{R}$ n'est pas répétée) :

– si X est presque sûrement constante égale à $c \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u) = e^{iuc}$;

– si X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ sur $\{0, 1\}$, $\varphi_X(u) = pe^{iu} + 1 - p$;

– si X suit la loi uniforme (discrète) $\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$, $\varphi_X(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{iuk}$;

– si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $\varphi_X(u) = (pe^{iu} + 1 - p)^n$;

– si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, $\varphi_X(u) = e^{\theta(e^{iu}-1)}$;

– si X suit la géométrique $\mathcal{G}(p)$, $\varphi_X(u) = \frac{pe^{iu}}{1-(1-p)e^{iu}}$;

– si X suit la loi uniforme (continue) $\mathcal{U}(a, b)$, $\varphi_X(u) = \frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}$ (en particulier, si X est uniforme sur $(-1, +1)$, $\varphi_X(u) = \frac{\sin(u)}{u}$) ;

– si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$, $\varphi_X(u) = \frac{\alpha}{\alpha - iu}$;

– si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\varphi_X(u) = e^{itm - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}$.

Seul le cas de la loi normale soulève une réelle difficulté, qui est étudiée dans l'Exercice 10.

La fonction caractéristique est un outil utile pour déterminer les moments d'une variable aléatoire réelle (quand ils existent). L'argument est basé sur l'application (immédiate) du théorème de dérivabilité de Lebesgue (Théorème 9, Leçon 3). Avant cela, le théorème de continuité (Théorème 8, Leçon 3) montre déjà qu'une fonction caractéristique est continue.

Proposition 4. *Si X, variable aléatoire réelle, est intégrable, alors sa fonction caractéristique φ_X est dérivable, de dérivée*

$$\varphi_X'(u) \,=\, i\,\mathbb{E}\big(Xe^{iuX}\big), \quad u \in \mathbb{R}.$$

En particulier $\varphi_X'(0) = i\,\mathbb{E}(X)$.

Plus généralement, si $\mathbb{E}(|X|^r) < \infty$ pour un entier $r \geq 1$, $\varphi_X^{(r)}(0) = i^r\,\mathbb{E}(X^r)$.

Il n'est pas inutile de rappeler ici que $\varphi_X(0) = 1$. À titre d'exemple, si X est de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\varphi_X(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}$, $u \in \mathbb{R}$, de sorte que $\varphi'_X(0) = 0$ et $\varphi''_X(0) = -1$, ce qui confirme, d'après l'énoncé précédent, espérance $\mathbb{E}(X) = 0$ et variance $\mathrm{Var}(X) = 1$. L'illustration peut être appliquée de la même façon à toutes les autres lois classiques décrites précédemment.

4 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace [2] est un outil un plus restrictif que la transformation de Fourier car il impose des conditions d'intégrabilité. Néanmoins, la transformée de Laplace offre bien des services, notamment comme série génératrice des moments.

Définition 5 (Transformée de Laplace)**.** *La transformée de Laplace de la loi d'un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est la fonction*

$$L_X(u) = \mathbb{E}\big(e^{\langle u,X\rangle}\big), \quad u \in \mathbb{R}^d.$$

Bien entendu, même si la transformée de Laplace fait sens, éventuellement infini, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, elle ne présente un réel intérêt que sur son domaine de définition

$$\mathrm{Dom}(L_X) = \big\{u \in \mathbb{R}^d \,;\, \mathbb{E}\big(e^{\langle u,X\rangle}\big) < \infty\big\}.$$

La suite de la présentation concerne, pour plus de simplicité, les variables aléatoires réelles. Les formules pour la transformée de Laplace des lois classiques sont similaires à celles pour la transformation de Fourier décrite dans le paragraphe précédent. Seule la loi exponentielle requiert de préciser le domaine de définition, qui à part cet exemple est $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Pierre-Simon de Laplace, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français (1749–1827).

La démonstration de l'énoncé suivant est admise (un argument de prolongement analytique à la bande $|\mathrm{Re}(z)| < \varepsilon$ dans le plan complexe, joint à la caractérisation par la transformation de Fourier correspondant à l'axe imaginaire, elle-même admise, pourrait être mis à profit).

Proposition 6. *Si le domaine de définition* $\mathrm{Dom}(L_X)$ *de la transformée de Laplace* L_X *d'une variable aléatoire réelle* X *contient un intervalle de la forme* $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ *pour un* $\varepsilon > 0$*, la connaissance de* L_X *détermine la loi de* X*, et sur cet intervalle,* L_X *est développable en série entière*

$$L_X(u) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\,\mathbb{E}(X^n)$$

(et tous les moments de X *sont bien définis).*

La transformée de Laplace d'une variable aléatoire réelle X est souvent plus manipulable après le changement de u en $s = e^u > 0$ pour s'écrire donc

$$G_X(s) \;=\; \mathbb{E}(s^X), \quad s > 0.$$

G_X est souvent qualifiée de *fonction génératrice des moments*. Elle est définie pour tout $s \in [0,1]$ pour une variable aléatoire positive. Elle est particulièrement intéressante pour analyser les variables aléatoires entières, pour lesquelles elle se représente comme

$$G_X(s) \;=\; \sum_{n \in \mathbb{N}\cup\{0\}} s^n\,\mathbb{P}(X = n).$$

La fonction G_X se prolonge naturellement en 0 par $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$. Par ailleurs, G_X décrit les moments dits factoriels

$$\mathbb{E}\big(X(X-1)\cdots(X-k+1)\big), \quad k \geq 1,$$

quand ils sont bien définis. En effet, la k-ième dérivée en $s \in]0,1[$ de G_X est

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)s^{n-k}\,\mathbb{P}(X = n).$$

Si

$$\mathbb{E}(X^k) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} n^k\,\mathbb{P}(X=n) \;<\; \infty,$$

par convergence dominée, $G_X(1)$ est précisément le moment factoriel d'ordre k.

La proposition précédente donne une réponse à la question de savoir si les moments $\mathbb{E}(X^n)$, $n \in \mathbb{N}$, d'une variable aléatoire réelle X sont suffisants pour caractériser la loi de cette dernière. C'est donc en particulier le cas s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{uX}) < \infty$ pour tout $u \in \,]-\varepsilon, +\varepsilon[$. La condition est notamment réalisée si X est bornée, donnant ainsi lieu à l'énoncé standard du théorème dit des moments.

Théorème 7 (Théorème des moments)**.** *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$; alors la connaissance des moments $\mathbb{E}(X^n)$, $n \in \mathbb{N}$, suffit à déterminer la loi de X.*

Le problème des moments de Hausdorff[3] décrit une condition nécessaire et suffisante sur une suite de réels m_n, $n \in \mathbb{N}$, pour qu'ils soient les moments d'une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle fermé borné $[a,b]$.

Appliqué à e^{-X} pour une variable aléatoire X à valeurs presque sûrement positives ou nulles, le théorème précédent admet la conséquence suivante, très utile dans la pratique.

Corollaire 8. *Pour une variable aléatoire réelle X à valeurs positives ou nulles, la transformée de Laplace $L_X(u) = \mathbb{E}(e^{uX})$, $u \in \,]-\infty, 0]$, caractérise la loi de X.*

Étant donné une mesure de probabilité μ à support compact sur les boréliens de $\mathbb{R}$, ou plus généralement telle que $\int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon|x|}d\mu < \infty$ pour un $\varepsilon > 0$, si une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mu) = \mathrm{L}^2((\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu))$ est orthogonale à tous les polynômes, elle est nécessairement nulle. En effet, les deux mesures $d\nu_+ = f^+d\mu$ et

3. Felix Hausdorff, mathématicien allemand (1868–1942).

$d\nu_- = f^- d\mu$ sont alors égales par le théorème des moments, et donc $f^+ = f^-$ μ-presque partout. L'orthogonal dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mu)$ du sous-espace vectoriel engendré par les polynômes est donc réduit à $\{0\}$, et en conséquence, les polynômes sont denses dans $\mathrm{L}^2(\mu)$.

Si μ n'est pas concentrée en un nombre fini de points (autrement dit n'est pas combinaison linéaire finie de masses de Dirac), les fonctions $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sont linéairement indépendantes dans $\mathrm{L}^2(\mu)$. Il est alors possible d'orthogonaliser les fonctions f_n par le procédé de Gram-Schmidt et de construire des bases hilbertiennes de polynômes orthogonaux, comme par exemple les polynômes de Legendre par rapport à la mesure de Lebesgue sur une intervalle borné de $\mathbb{R}$ (Exercice 7, Leçon 5) ou les polynômes d'Hermite par rapport à une mesure gaussienne.

5 Complément : Formule d'inversion de Fourier

Que la fonction caractéristique φ_X d'une variable aléatoire réelle X détermine la loi $\mathbb{P}_X$ de X (Théorème 3) est explicitement mis en évidence par la formule d'inversion de Fourier.

Proposition 9. *Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi a pour fonction caractéristique φ_X ; pour tous réels $a < b$,*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1}{iu} \left[e^{-iua} - e^{-iub}\right] \varphi_X(u)du \, = \, \mathbb{P}_X\big(]a,b[\big) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}_X\big(\{a,b\}\big).$$

En particulier, si a et b sont de continuité pour la fonction de répartition F_X, la limite est $F_X(b) - F_X(a)$.

Si la fonction caractéristique $\varphi_X(u)$, $u \in \mathbb{R}$, est intégrable, en tant que fonction de la variable réelle u, par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$, il ressort de l'énoncé précédent que la loi $\mathbb{P}_X$ admet une densité f par rapport à λ, continue et bornée, donnée par

$$f(x) \, = \, \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \, \varphi_X(u) d\lambda(u), \quad x \in \mathbb{R}.$$

En effet, par le théorème de Fubini-Tonelli en notation d'intégrale de Riemann,

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} \frac{1}{iu} \left[e^{-iua} - e^{-iub}\right] \varphi_X(u)du \, &= \, \int_{-T}^{T} \bigg(\int_a^b e^{-iux} dx\bigg) \varphi_X(u)du \\
&= \, \int_a^b \bigg(\int_{-T}^{T} e^{-iux} \, \varphi_X(u)du\bigg) dx.
\end{aligned}$$

Quand $T \to \infty$, par l'hypothèse d'intégrabilité et la proposition,

$$\int_a^b \bigg(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \, \varphi_X(u)du\bigg) dx \, = \, \mathbb{P}_X\big(]a,b[\big) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}_X\big(\{a,b\}\big),$$

et donc aussi $\mathbb{P}_X(\{a,b\}) = 0$ par continuité de l'expression de gauche. Ainsi $\int_a^b f(x)dx = \mathbb{P}_X(]a,b[)$ pour tous $a < b$, validant l'affirmation.

C'est un exercice classique que d'utiliser cette formule « à l'envers » sur l'exemple de la loi de densité $\frac{1}{2}\, e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$; la fonction caractéristique φ_X (d'une variable aléatoire X) de cette loi est égale à $\frac{1}{1+u^2}$, $u \in \mathbb{R}$, intégrable donc par rapport à la mesure de Lebesgue λ. Donc la loi de X admet la densité

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux}\, \frac{1}{1+u^2}\, d\lambda(u), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mais bien sûr cette densité est $\frac{1}{2}\, e^{-|x|}$ puisqu'elle est donnée au départ ! La relecture de l'égalité précédente exprime ainsi que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-|x|} \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-iux}\, \frac{1}{\pi(1+u^2)}\, d\lambda(u).$$

Le changement de $-u$ en u indique finalement que la transformée de Fourier de la loi de Cauchy est $e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, calcul qui n'est pas évident de but en blanc.

Exercices

(*Une étoile * désignera une question de difficulté supérieure.*)

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1.

a) Décrire et représenter la fonction de répartition de la loi de la variable aléatoire $Z = \min(X, 2)$.

b) Décomposer la loi de Z sous la forme d'une combinaison linéaire d'une masse de Dirac et d'une mesure à densité.

Exercice 2* (*Fonction quantile ou inverse généralisée*). Soit X une variable aléatoire réelle. Démontrer que la fonction de répartition F_X de la loi de X est croissante, continue à droite, et vérifie $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$.

Soit $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ une fonction croissante, continue à droite telle que $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$. On se propose de montrer qu'il existe une loi sur $\mathbb{R}$ dont F est la fonction de répartition.

a) On définit la fonction inverse généralisée $F^{(-1)}$ de F par la formule

$$F^{(-1)}(y) \ = \ \inf \big\{ x \in \mathbb{R};\ F(x) \geq y \big\}.$$

Montrer que pour $y \in]0, 1[$, $F^{(-1)}(y)$ est bien définie (i.e. la borne inférieure existe dans $\mathbb{R}$).

b) Montrer que pour $y \in]0, 1[$, $F^{(-1)}(y) \leq t$ si et seulement si $y \leq F(t)$.

c) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que la variable aléatoire $F^{(-1)}(U)$ a pour fonction de répartition F.

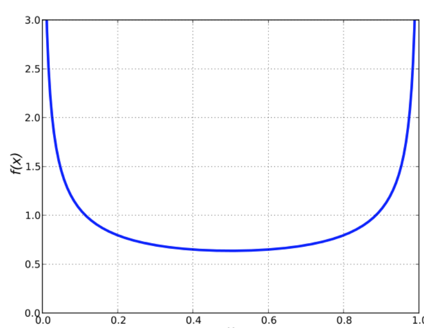
Cette observation est utilisée pour simuler des variables aléatoires de loi quelconque à partir de la simulation d'une loi uniforme. À noter que les arguments précédents montrent de la même façon que si X est une variable aléatoire *dont la loi admet une fonction de répartition F_X continue, alors la variable aléatoire $F_X(X)$ suit la loi uniforme sur* $[0, 1]$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1 ; déterminer les lois de la partie entière $N = \lfloor X \rfloor$ et de la partie décimale $D = X - \lfloor X \rfloor$ de X, et du couple (N, D).

Exercice 4 (*Loi de l'arcsinus*). Soit $\mathcal{C}$ (respectivement $\mathcal{D}$) le cercle (respectivement disque) de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ et $\Psi : \mathcal{D} \setminus \{0\} \to \mathcal{C}$ la fonction définie par

$$\Psi(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

On munit $\mathcal{C}$ de la tribu de ses boréliens et de la mesure de probabilité P, image de la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathcal{D} \setminus \{0\}$ par la fonction Ψ (autrement dit P est la mesure uniforme σ^1, ici normalisée, sur la sphère $\mathbb{S}^1 = \mathcal{C}$ – voir Théorème 3, Leçon 4). Soit $X : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ l'application première coordonnée, i.e. $X(x, y) = x$. Démontrer que la loi de X sous P a pour densité $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_{]-1,+1[}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (appelée loi de l'arcsinus, car sa fonction de répartition est donnée par $\frac{1}{\pi} \arcsin(t) + \frac{1}{2}$, $t \in [-1, +1]$).



Exercice 5. Le couple aléatoire (X, Y) est uniformément réparti sur le disque unité $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Déterminer les lois marginales.

b) Déterminer la loi du couple (R, Θ) des coordonnées polaires de (X, Y). (*Indication* : évaluer $\mathbb{E}(\phi(R)\psi(\Theta))$ pour des fonctions boréliennes, positives ou bornées, $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.)

c) Mêmes questions si (X, Y) suit la loi de densité $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi admet la densité $f_{(X,Y)}(x, y) = c(x^2 + y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Que vaut la constante c ? Montrer que les lois marginales de X et Y admettent des densités f_X et f_Y que l'on déterminera. Les variables X et Y sont-elles corrélées ? Comparer $f_{(X,Y)}$ avec le produit $f_X f_Y$.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ de paramètre $\alpha > 0$. Déterminer la transformée de Laplace L_X de la loi de X, en précisant son domaine de définition. En déduire $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \geq 1$, et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 8 (*Loi Gamma*). Déterminer la transformée de Fourier φ de la mesure de probabilité de densité $\frac{1}{\Gamma(p)} \alpha^p x^{p-1} e^{-\alpha x}$, $p, \alpha > 0$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, \infty[$, appelée loi Gamma $\gamma(p, \alpha)$ de paramètres (p, α) (si $p = 1$, il s'agit de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$). En déduire les premier et second moments. Les retrouver par un calcul direct.

Exercice 9 (*Loi log-normale*). Une variable aléatoire X à valeurs réelles strictement positives est dite de loi log-normale si $Y = \ln(X)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Calculer l'espérance et la variance de X si $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$.

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, bornée ainsi que sa dérivée, démontrer que

$$\mathbb{E}\big(Xg(X)\big) \;=\; \mathbb{E}\big(g'(X)\big).$$

b) Soit φ_X la fonction caractéristique de (la loi de) X. Établir une équation différentielle entre φ'_X et φ_X. En déduire la valeur de $\varphi_X(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

c) Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, et soit $Z = m + \sigma X$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

d) Déterminer la densité de la loi de Z. Quelle est la loi de Z ?

e) Quelle est la fonction caractéristique φ_Z de (la loi de) Z ?

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, dont la loi a pour fonction caractéristique φ_X ; vérifier que

$$\mathbb{P}(X = 0) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_X(\theta)d\theta.$$

Exercice 12*. Soit P une mesure de probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}$ de transformée de Fourier φ. Rappeler que si P a un moment (absolu) d'ordre 1, i.e. $\int_{\mathbb{R}} |x|dP < \infty$, alors φ est dérivable et $\varphi'(0) = i\int_{\mathbb{R}} xdP$.

Soit à présent la mesure $P = \sum_{n\geq 2} \frac{c}{n^2\ln(n)}(\delta_{+n} + \delta_{-n})$; préciser la valeur de $c > 0$.

a) Cette mesure admet-elle un moment (absolu) d'ordre 1 ?

b) Pour tout entier $N \geq 2$ et tout $u > 0$, définir

$$f_N(u) \;=\; \sum_{n=2}^{N} \frac{\sin^2(\frac{nu}{2})}{un^2\ln(n)} \quad \text{et} \quad g_N(u) \;=\; \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{nu}{2})}{un^2\ln(n)}\,.$$

Démontrer que $f_N(u) \leq \frac{uN}{4\ln(2)}$ et que $g_N(u) \leq \frac{1}{uN\ln(N)}$.

c) Trouver une fonction $u \to N(u)$ définie sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\lim_{u\to 0} f_{N(u)}(u) = \lim_{u\to 0} g_{N(u)}(u) = 0$.

d) En utilisant la symétrie de P, établir que

$$\varphi(u) - 1 \;=\; -2\int_{\mathbb{N}} \sin^2\left(\tfrac{ux}{2}\right) dP(x), \quad u \in \mathbb{R}.$$

e) Conclure des questions précédentes que φ est dérivable en 0.

Exercice 13*. Soit X une variable aléatoire de loi Gamma de paramètre $(\frac{1}{2}, 1)$, donc de densité $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{x}}\, e^{-x}$ sur $]0,\infty[$ (Exercice 8).

a) Établir une équation différentielle pour la fonction caractéristique φ_X de la loi de X. En conclure que

$$\varphi_X(u) \;=\; \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{u+i}\, du \right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Calculer $\varphi_X(u)$, $u \in \mathbb{R}$.

b) Quel est le sens de $I = \int_0^\infty \cos(x^2)dx$? Calculer I en étudiant $\varphi_X(u)$ lorsque $u \to \infty$.