C. R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, p. 79-82, 1988

Probabilités/*Probability Theory*

Isopérimétrie et inégalités de Sobolev logarithmiques gaussiennes

Michel LEDOUX

Résumé — Nous traduisons de façon fonctionnelle l'inégalité isopérimétrique pour la mesure de Gauss en montrant qu'une fonction sur $\mathbf{R}^n$ dont le module du gradient est intégrable par rapport à la mesure de Gauss appartient à l'espace d'Orlicz $L^1(\text{Log } L)^{1/2}$ de cette même mesure. De là s'obtiennent les inégalités de Sobolev logarithmiques complétant celle de Gross.

Gaussian isoperimetry and logarithmic Sobolev inequalities

Abstract — *We use the isoperimetric inequality for Gauss measure to show that a fonction on* $\mathbf{R}^n$ *whose gradient is integrable with respect to Gauss measure belongs to the Orlicz space* $L^1(\text{Log } L)^{1/2}$ *of this measure. This complements the logarithmic Sobolev inequality of Gross.*

Les inégalités de Sobolev de la théorie classique indiquent qu'une fonction dont le module du gradient appartient, avec la fonction elle-même, à $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leqq p < \infty)$ est dans $L^q(\mathbf{R}^n)$ où $1/q = (1/p) - (1/n)$. L'inégalité pour $p = 1$, qui implique les autres, est une inégalité géométrique équivalente à l'inégalité isopérimétrique usuelle dans $\mathbf{R}^n$ (*cf.* e. g. [11]). Nous nous proposons, dans cette Note, d'interpréter de façon analogue l'inégalité isopérimétrique dans l'espace de Gauss et d'en déduire les inégalités de Sobolev correspondantes.

Soit γ_n la mesure de probabilité canonique de Gauss sur $\mathbf{R}^n$ de densité

$$\varphi_n(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2\right), \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

Nous désignons par Φ la fonction de répartition de cette densité en dimension 1 :

$$\Phi(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx, \qquad t \in \bar{\mathbf{R}};$$

Φ^{-1} est sa fonction inverse.

Si à un borélien A de $\mathbf{R}^n$ on associe un demi-espace $H = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle x, u \rangle > \lambda\}$, $|u| = 1$, $\lambda \in \bar{\mathbf{R}}$, de même mesure $\gamma_n(H) = \gamma_n(A)$, l'inégalité isopérimétrique gaussienne (C. Borell [2]) exprime que, pour tout $r > 0$,

$$\gamma_n(x : d(x, A) < r) \geqq \gamma_n(x : d(x, H) < r)$$

où d désigne la distance euclidienne. Un calcul immédiat sur les demi-espaces, donc en dimension 1, montre alors que si F est un fermé dont le bord ∂F est de mesure nulle,

$$\liminf_{r \to 0} \frac{1}{2r} \gamma_n(x : d(x, \partial F) < r) \geqq \varphi_1 \circ \Phi^{-1} \circ \gamma_n(F), \tag{1}$$

soit une formulation peut-être plus commune de l'isopérimétrie ([3], § 2). Cette inégalité se traduit sur les fonctions suivant le schéma usuel utilisé pour la mesure de Lebesgue (*voir* [6], [9] par exemple). La formule de la coaire ([5], § 3.2) montre que pour toute fonction lipschitzienne f sur $\mathbf{R}^n$,

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla f(x)| \varphi_n(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{C_t} \varphi_n(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\, dt$$

Note présentée par Paul-André MEYER.

0249-6291/88/03060079 $ 2.00 © Académie des Sciences

où $C_t=\{x:|f(x)|=t\}$ et $\mathscr{H}^{n-1}$ est la mesure de Hausdorff de dimension $n-1$. Or, cette dernière s'obtient sur les ensembles suffisamment réguliers à l'aide du contenu de Minkowski, nous ramenant ainsi à (1); de façon précise, si W est un fermé $(n-1)$-rectifiable de $\mathbf{R}^n$,

$$\int_W \varphi_n(x)\,d\mathscr{H}^{n-1}(x)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\gamma_n(x:d(x,\,W)<r).$$

Si f est C^∞ à support compact, pour presque tout t, les ensembles de niveau C_t sont des sous-variétés C^∞ compactes $(n-1)$-dimensionnelles de $\mathbf{R}^n$. L'inégalité isopérimétrique (1) et la formule de la coaire montrent alors que

$$\int|\nabla f|\,d\gamma_n\geqq\int_0^\infty \varphi_1\circ\Phi^{-1}\circ\gamma_n(|f|>t)\,dt, \tag{2}$$

inégalité qui s'étend par régularisation à toutes les fonctions presque partout dérivables. La fonction $\varphi_1\circ\Phi^{-1}(u)$ étant équivalente à l'origine à la fonction $u(2|\operatorname{Log} u|)^{1/2}$, il s'ensuit immédiatement que si le membre de gauche de l'inégalité précédente est fini, la fonction $|f|(\operatorname{Log}^+|f|)^{1/2}$ est intégrable pour γ_n. En langage d'espaces d'Orlicz, posons, pour tout $p\geqq 1$ et tout $\alpha\geqq 0$,

$$H_\alpha^p(t)=t^p(1+\operatorname{Log}(1+t))^{p\alpha/2},\qquad t\geqq 0.$$

Ces fonctions convexes à croissance modérée définissent, sur $\mathbf{R}^n$ muni de γ_n, les espaces d'Orlicz notés $L^p(\operatorname{Log} L)^{p\alpha/2}(\gamma_n)$ des fonctions f telles que $|f|^p(\operatorname{Log}^+|f|)^{p\alpha/2}$ est intégrable par rapport à γ_n (*cf.* [8]). Les normes $\|\,.\,\|_p$ apparaissant plus loin sont celles des $L^p(\gamma_n)$.

THÉORÈME 1. — *Une fonction f sur $\mathbf{R}^n$ dont le module du gradient $|\nabla f|$ est dans $L^1(\gamma_n)$ appartient à l'espace d'Orlicz $L^1(\operatorname{Log} L)^{1/2}(\gamma_n)$.*

Des substitutions immédiates montrent également que si $|\nabla f|$ est dans $L^p(\gamma_n)$ $(1\leqq p<\infty)$, alors f appartient à $L^p(\operatorname{Log} L)^{p/2}(\gamma_n)$. Dans cet énoncé cependant, seul le cas $p=1$ correspondant au théorème 1 est réellement nouveau; en effet, la conjonction des inégalités sur les transformées de Riesz gaussiennes établies par P.-A. Meyer [10] et du travail [1] sur l'opérateur $(-L)^{-1/2}$, où L est le générateur d'Ornstein-Uhlenbeck, permet déjà de se rendre compte de l'implication précédente pour $1<p<\infty$, notre approche semblant toutefois plus naturelle. (Réciproquement bien entendu, les inégalités de Riesz gaussiennes et le théorème 1 permettent de retrouver une partie des conclusions de [1].) Le cas $p=2$ correspond à l'inégalité de Gross [7] qui est contenue dans (2) comme le montre le calcul suivant. Soit f sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\|f\|_2=1$ et telle que son gradient appartienne à $L^2(\gamma_n)$. En appliquant l'inégalité (2) à la fonction $H_1^1(f^2)$, et par l'équivalence à l'origine de $\varphi_1\circ\Phi^{-1}$, nous constatons que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C(\varepsilon)$ tel que l'on ait :

$$\int H_2^1(f^2)\,d\gamma_n\leqq(1+\varepsilon)\sqrt{2}\,\||\nabla f|\|_2\left(\int H_2^1(f^2)\,d\gamma_n+2\right)^{1/2}+C(\varepsilon).$$

Il s'ensuit que

$$\int f^2\operatorname{Log} f^2\,d\gamma_n\leqq\int H_2^1(f^2)\,d\gamma_n\leqq 2(1+\varepsilon)^4\,\||\nabla f|\|_2^2+2(1+\varepsilon)^2\,\||\nabla f|\|_2+C'(\varepsilon)$$

où $C'(\varepsilon)=(1+\varepsilon)\,C(\varepsilon)/\varepsilon$. Afin de nous débarrasser des termes parasites nous séparant encore de l'inégalité de Gross, nous empruntons un argument de [4] : les inégalités

précédentes étant satisfaites quelle que soit la dimension avec des constantes indépendantes de celle-ci, leur application à $f^{\otimes k}$ dans $((\mathbf{R}^n)^k, \gamma_n^{\otimes k}) = (\mathbf{R}^{nk}, \gamma_{nk})$ fournit

$$k \int f^2 \operatorname{Log} |f| \, d\gamma_n \leqq k(1+\varepsilon)^4 \| |\nabla f| \|_2^2 + \sqrt{k}(1+\varepsilon)^2 \| |\nabla f| \|_2 + C'(\varepsilon);$$

en divisant par k et en faisant tendre ce dernier vers l'infini, puis ε vers 0, nous obtenons bien par homogénéité l'inégalité de Gross

$$\int f^2 \operatorname{Log} |f| \, d\gamma_n \leqq \| |\nabla f| \|_2^2 + \| f \|_2^2 \operatorname{Log} \| f \|_2.$$

Rappelons l'équivalence de cette dernière avec l'hypercontractivité du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.

Sur la base du théorème 1, il est possible d'obtenir également des inégalités de Sobolev logarithmiques d'ordre supérieur. Soit, pour tout entier k et toute fonction f k-fois différentiable,

$$\Gamma_k(f) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right|^2$$

($\Gamma_0(f) = |f|^2$, $\Gamma_1(f) = |\nabla f|^2, \ldots$). En fait, une écriture plus commode dans son maniement, et qui permettra du même coup l'extension à des fonctions à valeurs vectorielles, consiste à noter que

$$\Gamma_k(f) = \int \ldots \int \left| \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} y^1_{i_1} \ldots y^k_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \right|^2 d\gamma_n(y^1) \ldots d\gamma_n(y^k)$$

où $y^j = (y^j_1, \ldots, y^j_n) \in \mathbf{R}^n$ pour tout $j = 1, \ldots, k$.

THÉORÈME 2. — *Pour tout $1 \leqq p < \infty$, tout entier k et toute fonction f de classe C^k sur $\mathbf{R}^n$,*

$$\int H_k^p(|f|) \, d\gamma_n \leqq C(p, k) \sum_{i=0}^{k} H_{k-i}^p(\| \Gamma_i(f)^{1/2} \|_p)$$

où $C(p, k)$ ne dépend que de p et k.

Démonstration. — Le schéma qui nous a conduit de l'inégalité (2) à l'inégalité de Gross montre de la même façon que pour tout $1 \leqq p < \infty$,

$$\int H_1^p(|f|) \, d\gamma_n \leqq C(p) \left(\int H_0^p(\Gamma_1(f)^{1/2}) \, d\gamma_n + H_1^p(\| f \|_p) \right)$$

où $C(p)$ ne dépend que de p. Par récurrence, l'on a également, pour tout entier $k \geqq 1$,

$$\int H_k^p(|f|) \, d\gamma_n \leqq C(p, k) \left(\int H_{k-1}^p(\Gamma_1(f)^{1/2}) \, d\gamma_n + H_k^p(\| f \|_p) \right).$$

Le théorème sera établi dès que nous saurons montrer que pour tout j,

$$(3) \qquad \int H_k^p(\Gamma_j(f)^{1/2}) \, d\gamma_n \leqq C(p, k, j) \left(\int H_{k-1}^p(\Gamma_{j+1}(f)^{1/2}) \, d\gamma_n + H_k^p(\| \Gamma_j(f)^{1/2} \|_p) \right),$$

l'inégalité précédente correspondant au cas $j = 0$. Soit, pour tout $y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$ dans $\mathbf{R}^n$,

$$F_{y'} = \sum_{i=1}^{n} y'_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Notons que, pour tout j, $\int \Gamma_j(F_{y'})\,d\gamma_n(y') = \Gamma_{j+1}(f)$. Appliquons alors l'inégalité (3) supposée satisfaite au rang j à $F_{y'}$ pour tout y' et intégrons ensuite par rapport à $d\gamma_n(y')$. L'identité précédente et l'équivalence de toutes les intégrales de fonctions convexes modérées H de normes de moyennes gaussiennes :

$$c\,\mathrm{H}\left(\int \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i \right\| d\gamma_n(x)\right) \leqq \int \mathrm{H}\left(\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i \right\|\right) d\gamma_n(x) \leqq C\,\mathrm{H}\left(\int \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i \right\| d\gamma_n(x)\right)$$

où les ξ_i sont éléments d'un espace de Banach quelconque $(B, \|\,.\,\|)$ et c, C ne dépendent que de H, permettent de vérifier que l'inégalité (3) est alors également satisfaite au rang $j+1$. Ceci conclut la démonstration du théorème 2.

Signalons pour conclure que les inclusions et inégalités précédentes s'étendent, par approximation suivant des normes régulières, au cas de fonctions à valeurs dans un espace de Banach; suivant [12], § 2, les définitions intégrales des Γ se prêtent favorablement à cette généralisation par simple remplacement des valeurs absolues par des normes. En outre, de l'indépendance de toutes les constantes vis-à-vis de la dimension de γ_n se déduit également l'extension à des mesures gaussiennes de dimension infinie.

Note reçue le 6 novembre 1987, acceptée le 9 novembre 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] D. BAKRY et P.-A. MEYER, Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques I et II, *Séminaire de Probabilités XVI; Lecture Notes in Math.*, n° 920, 1982, p. 138-150, Springer-Verlag.

[2] C. BORELL, The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space, *Invent. Math.*, 30, 1975, p. 207-216.

[3] A. EHRHARD, Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 17, 1984, p. 317-332.

[4] A. EHRHARD, Sur l'inégalité de Sobolev logarithmique de Gross, *Séminaire de Probabilités XVIII; Lecture Notes in Math.*, n° 1059, 1984, p. 194-196, Springer-Verlag.

[5] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, 1969, Springer-Verlag.

[6] H. FEDERER et W. H. FLEMING, Normal and integral currents, *Ann. of Math.*, 72, 1960, p. 458-520.

[7] L. GROSS, Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.*, 97, 1976, p. 1061-1083.

[8] M. A. KRANOSELKII et Y. B. RUTITSKY, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, 1962, Dehli Publ. Hindustan Corp.

[9] W. MAZJA, *Einbettungssätze für Sobolewsche Raüme, Teil* 1, 1979, Teubner-Texte zur Mathematik, Leipzig.

[10] P.-A. MEYER, Transformations de Riesz pour les lois gaussiennes, *Séminaire de Probabilités XVIII; Lecture Notes in Math.*, n° 1059, 1984, p. 179-193, Springer-Verlag.

[11] R. OSSERMAN, The isoperimetric inequality, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84, 1978, p. 1182-1238.

[12] G. PISIER, Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces, *Probability and Analysis*, Varenna, 1985; *Lecture Notes in Math.*, n° 1206, 1986, p. 167-241, Springer-Verlag.

Institut de Recherche Mathématique avancée, Laboratoire associé au C.N.R.S., Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg.