Exercices sur les suites de fonctions

1 Enoncés

Exercice 1 Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f_n(x) = x\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad g_n(x) = x - \frac{\sin x}{nx}, \quad \phi_n(x) = e^{-n|x|}\sin nx, \quad \psi_n(x) = e^{-n|x|}\cos nx.$$

Exercice 2 Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

- $f_n(x) = x^n$, sur $[0, 1[$;
- $g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$, sur $[0, \infty[$;
- $\phi_n(x) = x/(x^2 + n)$, sur $\mathbb{R}$;
- $\psi_n(x) = x e^{x/n}$, sur $[0, \infty[$.

Exercice 3 Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ de la suite (f_n) définie par

$$f_n(x) = \min\left\{n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right\}.$$

Exercice 4 Soient E un ensemble, (f_n) une suite de fonctions de E dans $\mathbb{K}$ et $f \in \mathbb{K}^E$. Soit $\{E_1, \ldots, E_m\}$ une famille de sous-ensembles telle que $E = \bigcup_{j=1}^m E_j$. Montrer que si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur chaque E_j, alors elle converge uniformément vers f sur E.

Exercice 5 Soit $f_n(x) = x/(1 + e^{nx})$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et calculer la limite.

(2) Comparer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) (f_n') est-elle uniformément convergente sur un intervalle $[-a, a]$ avec $a > 0$?

Exercice 6 On rappelle que toute fonction polynomiale bornée est nécessairement constante. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales réelles convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est une fonction polynomiale.

Exercice 7 Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que

(i) (f_n) converge simplement vers la fonction nulle ;

(ii) pour tout $x \in [a, b]$, la suite réelle $(f_n(x))$ est décroissante.

On souhaite montrer que la convergence de la suite est en fait uniforme.

(1) Montrer que $\|f_n\|_\infty$ tend vers une limite lorsque $n \to \infty$.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.

(3) En observant que, pour tout $m \leq n$, $f_n(x_n) \leq f_m(x_n)$, montrer que $\|f_n\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Conclure.

Exercice 8 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, on pose :

$$u_n(x) = n\left(f\Big(x + \frac{1}{n}\Big) - f(x)\right).$$

Montrer que la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers une fonction à préciser. Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x(1-1/n) \to x$ lorsque $n \to \infty$. Donc (f_n) converge simplement vers la fonction $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$, car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{n} = \infty \not\to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

  En revanche, la convergence est uniforme sur tout sous-ensemble A borné de $\mathbb{R}$. En effet, soit $M > 0$ tel que $A \subset [-M, M]$. Alors,

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in A} \frac{|x|}{n} \leq \frac{M}{n} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - n^{-1}\sin x \to x$ lorsque $n \to \infty$. Donc (g_n) converge simplement vers la fonction $g(x) = x$ sur $\mathbb{R}$. La convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$ car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\sin x|}{n} = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-n|x|}\sin(nx) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Donc (ϕ_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Nous allons montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. Pour cela, étudions la fonction sur $\mathbb{R}_+$. C'est suffisant puisque la fonction est impaire. Pour tout $x > 0$, la dérivée de $x \mapsto e^{-nx}\sin(nx)$ est la fonction

$$x \mapsto ne^{-nx}\big(\cos nx - \sin nx\big)$$

  Le premier zéro de la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ se produit en $x = \pi/(4n)$, et il est facile de voir qu'il s'agit d'un maximum local de la fonction $x \mapsto e^{-nx}\sin(nx)$. Or,

$$\exp\left(-n\frac{\pi}{4n}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{4n}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) \not\to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

  On montrerait en revanche que, pour tout $\delta > 0$, la convergence est uniforme sur $]-\infty, -\delta[\cup]\delta, \infty[$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\psi_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ et $\psi_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (ψ_n) converge simplement vers la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

  La convergence ne peut pas être uniforme car ψ n'est pas continue alors que les ψ_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2

- Pour tout $x \in [0,1[$, $x^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Donc la suite (f_n) convergence simplement vers la fonction nulle sur $[0,1[$. Or,
$$\sup_{x\in[0,1[} |x^n - 0| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1,$$
ce qui montre que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1[$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n^2xe^{-nx} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Donc la suite (g_n) convergence simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$. Or,
$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|n^2xe^{-nx} - 0\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left(n^2xe^{-nx}\right) = \frac{n}{e}.$$
En effet, la dérivée de la fonction $x \mapsto n^2xe^{-nx}$ est la fonction $x \mapsto n^2e^{-nx}\big(1-nx\big)$; on en déduit les variations de $g_n(x)$, et en particulier le fait que $g_n(x) = n^2xe^{-nx}$ atteint son maximum en $x = 1/n$, d'où le résultat annoncé. Il s'ensuit que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x/(x^2+n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Donc la suite (ϕ_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. La fonction (ϕ_n) étant impaire, on a :
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{x^2+n} - 0\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \frac{x}{x^2+n} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \phi_n(x).$$
Or,
$$\phi_n'(x) = \frac{n-x^2}{(x^2+n)^2},$$
qui s'annule pour $x = \pm\sqrt{n}$. On en déduit que aisément que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \phi_n(x) = \phi_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{2n} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty,$$
de sorte que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $xe^{x/n} \to x$ lorsque $n \to \infty$. Donc la suite (ψ_n) converge simplement vers la fonction $\psi(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$. Or,
$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |\psi_n(x) - \psi(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|xe^{x/n} - x\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} x\big(e^{x/n} - 1\big).$$
La dérivée de la fonction $x \mapsto x\big(e^{x/n}-1\big)$ est la fonction $x \mapsto e^{x/n}(1+x/n)-1$, qui est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $x \mapsto x\big(e^{x/n}-1\big)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} x\big(e^{x/n} - 1\big) = \lim_{x\to\infty} x\big(e^{x/n} - 1\big) = \infty.$$
On en déduit que la convergence n'est pas uniforme.

Solution de l'exercice 3 Pour tout $x > 0$ fixé, le rang $N := E(1/\sqrt{x})+1$, où $E(\cdot)$ désigne la fonction partie entière, est tel que
$$n \geq N \Longrightarrow \min\left\{n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Ainsi, la limite simple de (f_n) est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1/\sqrt{x}$. La convergence n'est pas uniforme car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+^*} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in]0,1/n^2[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in]0,1/n^2[} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - n\right) = \infty.$$

Solution de l'exercice 4 On a, pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\sup_{E_j} |f_n - f| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Or, on a toujours, pour une fonction φ quelconque,

$$\sup_E \varphi = \sup \left\{ \sup_{E_1} \varphi, \ldots, \sup_{E_m} \varphi \right\}. \tag{1}$$

En effet, d'une part pour tout j, $\sup_{E_j} \varphi \leq \sup_E \varphi$, de sorte que

$$\sup_E \varphi \geq \sup \left\{ \sup_{E_1} \varphi, \ldots, \sup_{E_m} \varphi \right\}, \tag{2}$$

et d'autre part, par définition du sup, on peut trouver une suite (x_k) à valeurs dans E telle que

$$\varphi(x_k) \longrightarrow \sup_E \varphi \quad \text{lorsque} \quad k \to \infty,$$

et comme les E_j sont en nombre fini, il y a au moins un sous-ensemble, disons $E_{j_\circ}$, qui contient une infinité de termes de la suite ; on a donc une suite extraite $(x_{k_j})_j$ de (x_k) à valeurs dans $E_{j_\circ}$, et l'on a alors $\varphi(x_{k_j}) \longrightarrow \sup_E \varphi$ lorsque $j \to \infty$, ce qui montre que $\sup_{E_{j_\circ}} \varphi = \sup_E \varphi$, et que l'inégalité (2) est en fait une égalité. Maintenant, fixons $\varepsilon > 0$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, m\}$, on trouve N_j tel que

$$k \geq N_j \Longrightarrow \sup_{E_j} |f_n - f| < \varepsilon.$$

En posant $N = \max\{N_1, \ldots, N_m\}$, on voit que

$$k \geq N \Longrightarrow \sup_E |f_n - f| < \varepsilon$$

en vertu de (1). Comme ε était arbitraire, ceci montre que $\sup_E |f_n - f| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Insistons sur l'importance de la finitude du nombre m de sous-ensembles *recouvrant* E. Sans cette finitude, le rang N est suceptible d'être rejeté vers l'infini ! On note encore que si le résultat démontré était vrai pour un *recouvrement* infini de E, alors la convergence simple impliquerait la convergence uniforme !

Solution de l'exercice 5

(1) Si $x > 0$, $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Si $x < 0$, $f_n(x) \to x$ lorsque $n \to \infty$. Comme $f_n(0) = 0$ pour tout n, on voit que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Etudions la convergence uniforme. Tout d'abord,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \max \left\{ \sup_{x<0} \left| \frac{x}{1+e^{nx}} - x \right|, \sup_{x\geq 0} \left| \frac{x}{1+e^{nx}} \right| \right\}.$$

On a :

$$\sup_{x<0}\left|\frac{x}{1+e^{nx}}-x\right| = \sup_{x<0}\left((-x)\left(1-\frac{1}{1+e^{nx}}\right)\right) = \sup_{x<0}\left((-x)\left(\frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}\right)\right) = \sup_{u<0}\left(-\frac{u}{n}\frac{e^u}{1+e^u}\right)$$

où l'on a fait le changement de variable $u = nx$. Le calcul du supremum de la fonction h définie par $h(u) = (-ue^u)/(1+e^u)$, $u \in \mathbb{R}_-^*$ semble difficile : on ne trouve pas de solution explicite. Mais on remarque que

$$\lim_{u\to-\infty} h(u) = 0 = \lim_{u\to 0} h(u).$$

Comme h est continue (et positive), elle est nécessairement bornée supérieurement (et atteint sa borne supérieure). Posons $M = \max_{u<0} h(u)$. Alors,

$$\sup_{x<0}\left|\frac{x}{1+e^{nx}}-x\right| = \frac{M}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty,$$

ce qui montre que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_-^*$. De même,

$$\sup_{x\geq 0}\left|\frac{x}{1+e^{nx}}\right| = \sup_{u\geq 0}\left(\frac{u}{n}\frac{1}{1+e^u}\right),$$

avec le même changement de variable que précédemment, et la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(u) = u/(1+e^u)$ est continu sur $\mathbb{R}_+$ et satisfait

$$g(0) = 0 = \lim_{u\to\infty} g(u).$$

Elle est donc bornée supérieurement (et atteint sa borne supérieure). Posons $M' = \max_{u\geq 0} g(u)$. Alors,

$$\sup_{x\geq 0}\left|\frac{x}{1+e^{nx}}\right| = \frac{M'}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty.$$

La convergence est donc uniforme sur $\mathbb{R}_+$ aussi. On déduit enfin de l'exercice 4 la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(2) Attention, l'intervalle sur lequel on travaille n'est pas borné, et l'on ne peut pas s'appuyer sur un théorème du cours. Avec le changement de variable $u = nx$, on a :

$$\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x}{1+e^{nx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_0^\infty \frac{u}{1+e^u}\,\mathrm{d}u.$$

La valeur exacte de la dernière intégrale semble difficile à obtenir. Mais on remarque que l'on peut majorer cette valeur :

$$\int_0^\infty \frac{u}{1+e^u}\,\mathrm{d}u \leq \int_0^\infty ue^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[-ue^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[-e^{-u}\right]_0^\infty = 1,$$

où l'on a effectué une intégration par partie. Ainsi,

$$\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty,$$

et la limite de l'intégrale est ègale à l'intégrale de la limite.

(3) On a :

$$f_n'(x) = \frac{1 + e^{nx} - nxe^{nx}}{(1 + e^{nx})^2}.$$

Il est facile de voir, en séparant les cas $x < 0$, $x = 0$ et $x > 0$, que (f_n') converge simplement vers la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Soient maintenant $a > 0$ et $I = [-a, a]$. Toutes les fonctions f_n sont continues sur I. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que la suite (f_n') converge uniformément vers g sur I. Alors g devrait être continue sur I, ce qui n'est pas le cas. Donc la suite (f_n') ne converge pas uniformément vers g sur I.

Solution de l'exercice 6 Fixons $\varepsilon = 1$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq 1, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |P_n(x) - f(x)| \leq 1.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, le polynôme $P_n - P_N$ est borné, donc constant. En effet, d'après l'inégalité triangulaire est les propriétés du supremum,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_n(x) - P_N(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |P_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P_N(x)| \leq 2.$$

Puisque la suite (P_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, la suite $(P_n - P_N)_{n \geq N}$ converge uniformément vers $f - P_N$ sur $\mathbb{R}$. Mais pour tout $n \geq N$, le polynôme $P_n - P_N$ est constant. Il est clair que la limite uniforme d'une suite de fonctions constantes est constante, ce qui montre que la fonction $f - P_N$ est constante, autrement dit, que $f = P_N + C$, où C est une constante réelle. Ainsi, f est bien une fonction polynomiale.

Solution de l'exercice 7

(1) La suite $\|f_n\|_\infty$ est clairement décroissante, et elle est minorée par zéro. Elle est donc convergente.

(2) La fonction f_n étant continue sur $[a, b]$, il en est de même de la fonction $|f_n|$, qui de ce fait est bornée sur $[a, b]$ et y atteint ses bornes. Donc,

$$\exists x_n \in [a, b] : \; |f_n(x_n)| = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x)| .$$

Or, la fonction f_n est à valeurs positives puisque, d'après les hypothèses, pour tout $x \in [a, b]$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ est décroissante et tend vers zéro. On peut donc écrire en fait :

$$\exists x_n \in [a, b] : f_n(x_n) = \sup_{x \in [a,b]} f_n(x).$$

(3) Puisque la suite (x_n) est bornée, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge, vers un point $\bar{x} \in [a, b]$. Rappelons que, si $m \leq n_k$,

$$\|f_{n_k}\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} f_{n_k}(x) = f_{n_k}(x_{n_k}) \leq f_m(x_{n_k}).$$

En faisant tendre k vers l'infini, nous obtenons l'inégalité

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n\|_\infty \leq f_m(\bar{x}).$$

En faisant maintenant tendre m vers l'infini, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty \leq 0,$$

ce qui montre que $\|f_n\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Il s'ensuit que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, b]$.

Solution de l'exercice 8 Il est facile de voir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) \to f'(x)$. Autrement dit, (u_n) converge simplement vers f' sur $\mathbb{R}$. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et montrons que la convergence est uniforme sur cet intervalle. Remarquons que

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = \int_x^{x+1/n} f'(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{de sorte que} \quad u_n(x) - f'(x) = n \int_x^{x+1/n} \big(f'(t) - f'(x)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Rappelons qu'une fonction continue sur un intervalle compact est uniformément continue sur cet intervalle. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, sa dérivée f' est continue. Elle est donc uniformément continue sur l'intervalle compact $[a, b+1]$. Ainsi, en fixant $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b+1]\,, \quad \big[\, |x - y| \leq \delta \implies \big|f'(x) - f'(y)\big| \leq \varepsilon \big].$$

Or, pour n suffisamment grand, $1/n \leq \delta$ et donc, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\big|u_n(x) - f'(x)\big| \leq n \int_x^{x+1/n} \big|f'(t) - f'(x)\big|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

Puisque ε peut être choisi arbitrairement petit, ceci montre que la convergence de (u_n) vers f' est uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.