Exercices corrigés
sur les séries de Fourier

1 Enoncés

Exercice 1 Calculer la série de Fourier trigonométrique de la fonction 2π-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi, \pi]$. La série converge-t-elle vers f ?

Exercice 2 Calculer la série de Fourier, sous forme trigonométrique, de la fonction 2π-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$. La série converge-t-elle vers f ?

Exercice 3 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \,]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

(1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

(2) étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.

(3) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Exercice 4 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in \,]-\pi, \pi]$.

(1) Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction f.

(2) étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.

(3) En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Exercice 5 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = (x-\pi)^2, \quad x \in [0, 2\pi[\,.$$

(1) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

(2) Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

(3) En déduire les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 6 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique continûment différentiable, et soit α un réel non nul. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) + \alpha x(t) = f(t).$$

Trouver une solution 2π-périodique de cette équation en écrivant $x(t)$ et $f(t)$ sous la forme de séries de Fourier trigonométrique. Appliquer ce résultat au cas où $\alpha = 1$ et

$$f(t) = \begin{cases} \left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 & \text{si } t \in [0, \pi[\,, \\ -\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{\pi^2}{2} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi[\,. \end{cases}$$

Exercice 7 (Théorème de Féjer) On note $\mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodiques. On définit le produit de convolution de deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ par

$$(f_1 \circledast f_2)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x-y) f_2(y) \,\mathrm{d}y.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\varphi_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^{l} e^{imx}.$$

(1) Montrer que

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} \dfrac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ k & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

(2) Montrer que φ_k satisfait les propriétés suivantes :

  (a) pour tout k, $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x) \,\mathrm{d}x = 1$;

  (b) pour tout $\varepsilon \in \,]0, \pi[$, $(2\pi)^{-1} \int_{|x| \in [\varepsilon, \pi]} \varphi_k(x) \,\mathrm{d}x \to 0$ lorsque $k \to \infty$.

  En déduire que, si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, alors $f \circledast \varphi_k$ converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.

(3) Calculer $f \circledast \varphi_k$. Conclure.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1 Il est facile de voir que la fonction f est paire, de sorte que les coefficients b_n sont tous nuls, et que

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\pi \cos(nt)\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n^2}\big(1-(-1)^n\big) & \text{si } n \neq 0, \\ \pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

On a donc :

$$SF(f)(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k\geq 1} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos\big((2k+1)t\big).$$

Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet montre que la série converge vers f en tout point de $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2 La fonction f n'est ni paire ni impaire. Calculons ses coefficients de Fourier trigonométriques. D'une part,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

et d'autre part, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right\} \\ &= -\frac{2}{\pi}\left\{\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n^2}\right)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos(nt)}{n^2}\,\mathrm{d}t\right\} \\ &= -\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{2\pi}{n^2} + \left[\frac{\sin(nt)}{n^3}\right]_0^{2\pi}\right\} \\ &= \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-t^2\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2t\frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right\} \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{4\pi^2}{n} + \left[2t\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi}\frac{\sin(nt)}{n^2}\,\mathrm{d}t\right\} \\ &= -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^3}\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{4\pi}{n}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$SF(f)(t) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\cos(nt)}{n^2} - \frac{\pi\sin(nt)}{n}\right).$$

La fonction f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série $SF(f)$ converge en tout t vers

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2\pi^2 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Solution de l'exercice 3

(1) La fonction f étant impaire, $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 1$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

La série de Fourier trigonométrique de f est donc donnée par

$$SF(f)(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin\big((2k+1)t\big).$$

(2) La fonction f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série $SF(f)$ converge en tout t vers

$$\frac{f(t+)+f(t-)}{2} = f(t).$$

La convergence ne peut être uniforme car la limite f n'est pas continue.

(3) Pour $t = \pi/2$, on a :

$$\sin\big((2k+1)t\big) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Puisque f est impaire, l'égalité de Parseval donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty |b_n(f)|^2 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ensuite, on a :

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Enfin,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Solution de l'exercice 4

(1) On a :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-in)\pi}-e^{-(1-in)\pi}}{1-in}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left((-1)^n\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{1-in}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\frac{(-1)^n}{1-in}. \end{aligned}$$

(2) On vérifie facilement que les hypothèses du théorème de Dirichlet sont satisfaites. Il s'ensuit que

$$SF(f)(t) = c_0(f) + \sum_{n\geq 1}\left(c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}\right)$$

converge vers $f(t)$ si $t \in \left]-\pi,\pi\right[$ et vers $\big(f(\pi+)+f(\pi-)\big)/2 = \operatorname{ch}\pi$ si $t=\pi$. Autrement dit,

$$\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{int} = \begin{cases} e^t & \text{si } t\in\left]-\pi,\pi\right[\\ \operatorname{ch}\pi & \text{si } t=\pi. \end{cases}$$

La fonction somme n'étant pas continue, la convergence ne peut pas être uniforme.

(3) Pour $t=0$, on obtient :

$$1 = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{1-in},$$

soit

$$\frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{1-in}+\frac{1}{1+in}\right) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1+n^2},$$

d'où l'on tire que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi}+1\right).$$

Pour $t=\pi$, on obtient :

$$\operatorname{ch}\pi = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-in},$$

soit

$$\frac{\pi}{\operatorname{th}\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1-in} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{1+n^2},$$

d'où l'on tire que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\operatorname{th}\pi}+1\right).$$

Solution de l'exercice 5 :

(1) On remarque que f est paire, de sorte que $b_n(f) = 0$ pour tout n. Par ailleurs,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2\cos(ny+n\pi)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y^2\cos(ny)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{4}{n^2}(-1)^n\pi \\ &= \frac{4}{n^2}, \end{aligned}$$

où l'on a effectué deux intégrations par parties. La série de Fourier de f s'écrit donc

$$SF(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

(2) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Le théorème de Dirichlet permet donc de conclure que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $SF(f)(x) = f(x)$.

(3) D'après la question précédente,

$$\pi^2 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad 0 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Solution de l'exercice 6 : On écrit :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt) \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nt + B_n\sin nt)$$

et, en dérivant terme à terme,

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(nB_n\cos nt - nA_n\sin nt).$$

On a alors

$$x'(t) + \alpha x(t) = \frac{\alpha A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big[(nB_n + \alpha A_n)\cos nt + (\alpha B_n - nA_n)\sin nt\big].$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & \alpha A_0, \\ a_n & = & nB_n + \alpha A_n, \\ b_n & = & \alpha B_n - nA_n, \end{array}\right. \quad i.e. \quad \left\{\begin{array}{lcl} A_0 & = & \dfrac{a_0}{\alpha}, \\ A_n & = & \dfrac{\alpha a_n - nb_n}{n^2+\alpha^2}, \\ B_n & = & \dfrac{na_n + \alpha b_n}{n^2+\alpha^2}. \end{array}\right.$$

La fonction f proposée est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons ses coefficients de Fourier. On a :

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\left[-\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2}.$$

Par ailleurs, on remarque que la fonction $f - a_0(f)/2$ est impaire, de sorte que $a_n(f) = 0$ pour $n \geq 1$. Enfin,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi}\left[-\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]\sin nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2}\int_\pi^{2\pi} \sin nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-(-1)^n}{\pi}\, I_1 + \frac{\pi}{2}\, I_2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin nt\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\cos nt}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos nt}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi^2}{4n}\big(1-(-1)^n\big) + \frac{2}{n}\int_0^\pi \left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos nt\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi^2}{4n}\big(1-(-1)^n\big) + \frac{2}{n}\left(\left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{\pi^2}{4n}\big(1-(-1)^n\big) + \frac{2}{n^2}\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{4n}\big(1-(-1)^n\big) + \frac{2}{n^3}\big(1-(-1)^n\big) \\ &= \big(1-(-1)^n\big)\left[\frac{\pi^2}{4n} - \frac{2}{n^3}\right] \end{aligned}$$

et

$$I_2 = \int_\pi^{2\pi} \sin nt\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos nt}{n}\right]_\pi^{2\pi} = -\frac{1}{n}\big(1-(-1)^n\big).$$

Donc

$$b_n(f) = \frac{-4(1-(-1)^n)}{\pi n^3}.$$

On obtient $A_0 = \pi^2/2$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_{2k} = B_{2k} = 0$,

$$\begin{aligned} A_{2k-1} &= \frac{8}{\pi(2k-1)^2\big((2k-1)^2+1\big)} \\ \text{et } B_{2k-1} &= \frac{-8}{\pi(2k-1)^3\big((2k-1)^2+1\big)}. \end{aligned}$$

Finalement, il est facile de voir que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nB_n \cos nt - nA_n \sin nt)$$

est uniformément convergente, et que par conséquent la série

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt)\,,$$

qui est aussi uniformément convergente, a pour somme une fonction $x(t)$ continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, qui est solution de l'équation différentielle donnée.

Solution de l'exercice 7 :

(1) Il est facile de voir que, pour tout $l \in \mathbb{N}$ et tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{m=-l}^{l} e^{imx} = \sum_{m=0}^{l} e^{imx} + \sum_{m=0}^{l} e^{-imx} - 1 = \frac{\cos lx - \cos(l+1)x}{1-\cos x},$$

de sorte que

$$\sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^{l} e^{imx} = \frac{1-\cos kx}{1-\cos x}.$$

La valeur de φ_k en tout $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ s'obtient aisément par un argument de continuité, ou par un calcul direct.

(2) Comme $\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\,\mathrm{d}x$ est nulle pour $m \neq 0$ et vaut 2π pour $m = 0$, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=-l}^{l}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Fixons maintenant $\varepsilon \in\,]0,\pi[$, et posons $K_\varepsilon := 2(1-\cos\varepsilon)^{-1}$. Il est clair que, pour tout $x \in [-\pi,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,\pi]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|\varphi_k(x)| = \frac{1}{k}\left|\frac{1-\cos kx}{1-\cos x}\right| \leq \frac{K_\varepsilon}{k}.$$

Donc, pour k suffisamment grand, $|\varphi_k(x)| \leq \varepsilon$, de sorte que

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|x|\in[\varepsilon,\pi]} \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon,$$

et le point (b) s'ensuit. Puisque f est continue et 2π-périodique, elle est uniformément continue. Etant donné $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\eta \in\,]0,\pi[$ tel que

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}, \quad \left|y'-y\right| < \eta \Longrightarrow \left|f(y')-f(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
&2\pi\,|(f \circledast \varphi_k - f)(x)| \\
&= \left|\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-y)-f(x)\big)\varphi_k(y)\,\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)-f(x)|\,\varphi_k(y)\,\mathrm{d}y \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

où

$$I_1 := \int_{|y|<\eta} |f(x-y) - f(x)|\, \varphi_k(y)\, \mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$I_2 := \int_{|y|\in[\eta,\pi]} |f(x-y) - f(x)|\, \varphi_k(y)\, \mathrm{d}y \leq 2\, \|f\|_\infty \cdot \int_{|y|\in[\eta,\pi]} \varphi_k(y)\, \mathrm{d}y.$$

La propriété (b) montre que

$$2\, \|f\|_\infty \int_{\|y\|\in[\eta,\pi]} \varphi_k(y)\, \mathrm{d}y \leq \varepsilon/2$$

pour k suffisamment grand, et le résultat s'ensuit.

(3) Nous avons :

$$\begin{aligned}
(f \circledast \varphi_k)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\varphi_k(y)\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^{l} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{imy}\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^{l} e^{imx} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(y') e^{-imy'}\, \mathrm{d}y',
\end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable $y' = x - y$. En notant $c_m(f)$ le coefficient de Fourier complexe de f d'ordre m et $S_l(f)(x)$ la somme partielle d'ordre l de la série de Fourier de f, c'est à dire,

$$c_m(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-imy}\, \mathrm{d}y \quad \text{et} \quad S_l(f)(x) := \sum_{m=-l}^{l} c_m(f) e^{imx},$$

nous voyons que

$$(f \circledast \varphi_k)(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^{l} c_m(f) e^{imx} = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} S_l(f)(x).$$

Nous avons donc montré le théorème de Féjer : si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, la série de Fourier de f converge uniformément vers f au sens de Césaro.