Borne Inférieure, borne supérieure

Tatiana Labopin-Richard

1 Rappel sur le vocabulaire de base

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et x un élément de $\mathbb{R}$.
- On dit que m est un majorant de A (resp. un minorant) dans $\mathbb{R}$ si

$$\forall a \in A,\ a \leq m \text{ (resp. } \in A,\ m \leq a).$$

- On dit que A est majorée (resp. minorée) dans $\mathbb{R}$ si A admet au moins un majorant (resp. au moins un minorant) dans $\mathbb{R}$, c'est à dire si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \leq m \text{ (resp.}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A,\ m \leq A).$$

- On dit que A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.
- On dit que x est le plus grand élément (resp. le plus petit élément) de A si x est un majorant (resp. minorant) de A et si $x \in A$.

Des exemples :
- 2 est un majorant de $]0,2[$ et est le plus grand élément de $]0,2]$.
- $\{\cos(x), \in \mathbb{R}\}$ est bornée par 1 (majorant et plus grand élément car atteind en 0) et -1 (minorant et plus petit élément car atteind en π).
- Trouver deux autres exemples.

2 Borne inf, borne sup

2.1 Définition

Si l'ensemble des majorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus petit élément M on dit que M est la borne supérieure de A et on note $M = \sup(A)$. Cette borne est alors unique.

Si l'ensemble des minorants d'une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément m, on dit que m est la borne inférieure de A et on note $m = \inf(A)$. Cette borne est alors unique.

2.2 Propriétés

Théorème : Toute partie non vide et majorée dans $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Caractérisation 1 : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. La borne supérieure de A est l'unique réel tel que :
i) Si $a \in A$, alors $a \leq \sup(A)$ (c'est un majorant de A).
ii) Pour tout nombre $x < \sup(A)$, $\exists a \in A$ tel que $x < a$ (c'est le plus grand des majorants).

Caractérisation 2 : $\forall \epsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \sup(A) - \epsilon < a < \sup(A)$.

2.3 Des exemples :

- Si une partie admet un plus grand élément, c'est sa borne supérieure.
- Si a et b sont deux réels tels que $a < b$ alors $\sup([a, b[) = b$.
- $\sup(\{\cos(x), x \in [0, \frac{\pi}{2}]\}) = 1$.
- $\sup(\{\cos(x), x \in]0, \frac{\pi}{2}]\}) = 1$.

3 Exercices :

3.1 Exercice 1 :

Ecrire la partie précédente pour la borne inférieure au lieu de la borne sup.

3.2 Exercice 2 :

Déterminer les bornes supérieure et inférieure (si elles existent) de $A = \{(u_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ avec $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ si n est impair.

3.3 Exercice 3 :

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Vrai ou Faux ?
1) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2) $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$.
3) $A \subset B \Rightarrow \inf(A) \leq \inf(B)$.
4) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
5) $\sup(-A) = -\inf(A)$.
6) $\sup(A) + \inf(B) \leq \sup(A + B)$.

3.4 Exercice 4 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n(1-x)$. Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} f_n(x).$$