Séance de soutien PCSI2 numéro 3 : Correction des exercices, Représentations des nombres complexes

Tatiana Labopin-Richard

5 novembre 2014

Exercice 1
Comme z et z' sont de module 1, on a

$$\frac{z+z'}{1+zz'} = \frac{\frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{\overline{z'}}}{1+\frac{1}{\overline{zz'}}} = \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{zz'}} = \overline{\frac{z+z'}{1+zz'}}$$

Donc comme $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est égal à son conjugué, il est réel.

Exercice 2

Avec la forme neutre : Soit $z \in \mathbb{U}$.

$$|1+z|^2 = (1+z)(1+\overline{z}) = 1 + 2\mathcal{R}e(z) + |z|^2.$$

Donc $|1+z| \geq 1$ si et seulement si $\mathcal{R}e(z) \geq \frac{-1}{2}$.
Observons que :

$$2|\mathcal{R}e| = |z+\overline{z}| = |\overline{z}||1+z^2| = |1+z^2|.$$

L'inégalité $|1+z^2| \geq 1$ a donc lieu si et seulement si $\mathcal{R}e(z)| \geq \frac{1}{2}$.
Comme tout réel x vérifie $x \geq \frac{-1}{2}$ ou $|x| \geq \frac{1}{2}$, on a bien $|1+z| \geq 1$ ou $|1+z^2| \geq 1$.

Avec la forme algébrique :
Soit $z = a+ib$ un complexe de module 1 mis sous forme algébrique. L'inégalité $|1+z| \geq 1$ a lieu si et seulement si $(1+a)^2+b^2 \geq 1$, soit $2a+a^2+b^2 \geq 0$ ou encore $a \geq \frac{-1}{2}$.
On a aussi

$$|1+z^2| = |1+a^2-b^2+2iab| = |2a^2+2iab|$$

car $a^2+b^2=1$.

$$|1+z^2| = 2|a||a+ib| = 2|a|$$

Donc $|1+z^2| \geq 1$ si et seulement si $|a| \geq \frac{1}{2}$. La conclusion est la même.

Avec la forme géométrique : Soit $z \in \mathbb{U}$ et M son image dans le plan. On note θ l'argument principal de z. Affirmer que $|1+z| \leq 1$, c'est affirmer que $|1+z| \geq |z|$, c'est à dire que M est plus proche de l'origine que du point I d'affixe -1. Comme z est de module 1, cela revient à dire que $\theta \in]\frac{-2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, par exemple si $\theta \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, alors $2\theta \in]\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$ et donc z^2 est plus proche de 0 que de I :

$$|1+z^2| \geq |z^2| = 1.$$

De même si $\theta \in]-\pi, \frac{-2\pi}{3}[$.

Exercice 3 :
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = \frac{-1}{z_0}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{z+z_0}{1+z\overline{z}} \in D &\Leftrightarrow \left|\frac{z+z_0}{1+\overline{zz_0}}\right| < 1 \\
&\Leftrightarrow |1+z_0|^2 < |1+\overline{zz_0}|^2 \\
&\Leftrightarrow (z+z_0)(\overline{z}+\overline{z_0}) < (1+z\overline{z_0})(1+\overline{z}z_0) \\
&\Leftrightarrow 1-|z|^2-|z_0|^2+|z|^2|z_0|^2 > 0 \\
&\Leftrightarrow |z|^2+|z_0|^2+2\mathcal{R}e(zz_0) < 1+|z|^2|z_0|^2+2\mathcal{R}e(zz_0) \\
&\Leftrightarrow (1-|z|^2)(1-|z_0|^2) > 0 \\
&\Leftrightarrow (1-|z|^2) > 0 \\
&\Leftrightarrow z \in D
\end{aligned}$$

Comme de plus $\frac{-1}{z_0} \notin D$, on a bien l'équivalence.

Exercice 5 :

1) Commençons par simplifier l'équation, en remarquant (en multipliant par la quantité conjuguée) que

$$\frac{-4i}{1+i} = \frac{-4i(1-i)}{1-(-1)} - 2 - 2i$$

et

$$\frac{26-2i}{1+i} = 12-14i.$$

Nous recherchons donc les racines du trinôme $X^2 - (2+2i)X + 12 - 14i$. Calculons le discriminant

$$\Delta = (-(2+2i)^2) - 4(12-14i) = 16(-3+4i) = (4(1+2i))^2$$

et déduisons-en les deux racines

$$x_1 = \frac{2+2i+4(1+2i)}{2} = 3+5i$$

et

$$x_2 = \frac{2+2i-4(1+2i)}{2} = 3+5i.$$

2) Cette équation a les mêmes solutions que $z^2 - 2z - \frac{85}{7-6i} = 0$. Et $\frac{85}{7-6i} = 7+6i$ (un numérateur aussi moche cache quelque chose, penser à simplifier !).
On trouve alors :

$$\begin{aligned} \Delta &= 32 + 24i = 4(8+6i) = (2(3+i))^2 \\ x_1 &= 4+i \\ x_2 &= -2-i \end{aligned}$$

3) Un nombre imaginaire pur ib, $b \in \mathbb{R}$ est solution si et seulement si

$$-ib^3 + (5+3i)b^2 + i(7+16i)b + 3 - 21i = 0$$

soit en égalisant les parties réelle et imaginaire,

$$\begin{cases} 5b^2 - 16b + 3 = 0 \\ -b^3 + 3b^2 + 7b - 21 = 0 \end{cases}$$

Le polynôme $5X^2 - 16X + 3$ admet 3 et $\frac{1}{5}$ pour racines. On vérifie que 3 est aussi racine et de $-X^3 + 3X^2 + 7X - 21$ (ce qui est le cas) et on conclut donc que $3i$ est solution imaginaire pure. Ainsi, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$X^3 - (5+3i)X^2 + (7+16i)X + 3 - 21i = (X - 3i)(aX^2 + bX + c).$$

Par identification, on trouve que

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 7+i \\ b = -5. \end{cases}$$

Les deux autres solutions sont donc les racines de $X^2 - 5X + 7 + i$.

$$\begin{aligned}\Delta &= -3-4i = (1-2i))^2\\ x_1 &= 2+i\\ x_2 &= 3-i\end{aligned}$$

4) On pose $y = z^3$.

a) On recherche d'abord les racines de $X^2 + (2i-1)X - i - 1$.

$$\begin{aligned}\Delta &= 1\\ x_1 &= -i\\ x_2 &= 1-i\end{aligned}$$

b) On cherche les racines cubiques de $-i$ et $1-i$.

$$\begin{aligned}-i &= \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\\ 1-i &= \sqrt{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Les solutions sont donc

$$\begin{aligned}\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\\ j\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right) &= i\\ j^2\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\end{aligned}$$

et

$$2^{\frac{1}{6}}\exp\left(-i\frac{\pi}{12}\right),\ 2^{\frac{1}{6}}\exp\left(i\frac{7\pi}{12}\right),\ 2^{\frac{1}{6}}\exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right).$$

Nous obtenons donc

$$\mathcal{S} = \{i,\ \frac{\sqrt{3}-i}{2},\ -\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ 2^{-\frac{1}{3}}(1+i),\ \frac{2^{\frac{1}{6}}}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{2}-\sqrt{6})\right),\ \frac{2^{\frac{1}{6}}}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right).$$

Exercice 6 :

1) Par identification, nous obtenons

$$(a,b,c) = (1,1,-1).$$

2) On pose $z = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$, de sorte que

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

On sait que la somme des racines cinquième de l'unité est nulle, donc nous avons

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0.$$

Par ailleurs, comme $z \neq 0$, nous avons

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 = z^2\left(\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + (\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1\right).$$

Donc $2\cos(\frac{2\pi}{5}$ est racine de $X^2 + X - 1$.

Mais comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, $2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc (en cherchant les racines du polynôme à la main et en prenant celle qui est positive),

$$\cos\left(\frac{1\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Par le même encadrement, nous avons aussi $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, et donc comme $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, nous avons

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 5}}{2\sqrt{2}}.$$

La forme algébrique est donc

$$\exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + i\frac{\sqrt{\sqrt{5} + 5}}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 7 :

On décompose en deux morceaux simple : le numérateur sans la puissance z_1 et le dénominateursans la puissance z_2.

Commençons par calculer le module de z_1 : $|z_1| = 2$. Ainsi, nous pouvons factoriser par ce module :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\exp\left(\frac{-i\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

De même, nous avons $|z_2| = \sqrt{2}$ et donc

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1^5}{z_2^3} \\ &= \frac{\left(2\exp\left(\frac{-i\pi}{3}\right)\right)^5}{\left(\sqrt{2}\exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right)\right)^3} \\ &= \frac{2^5}{\sqrt{2}^3}\exp\left(-i\pi\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{4}\right)\right) \\ &= 8\sqrt{2}\exp\left(-i\pi\frac{11}{12}\right) \end{aligned}$$

Exercice 8

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \left(\frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2}\right)^3\left(\frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}\right) \\ &= \frac{i}{2^4}\left(\exp(3ix - 3\exp(2ix)\exp(-ix) + 3\exp(ix)\exp(-2ix) - \exp(-3ix)\right)\left(\exp(ix) + \exp(-ix)\right) \end{aligned}$$

Après développement et simplifications, on trouve donc

$$\phi(x) = \frac{-1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(4x).$$

Exercice 9 On va transformer cette équation en une équation facile à résoudre (c'est à dire qu'on va faire apparaître un polynôme en $\cos(x)$). On utilise la formule de Moivre.

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \mathcal{R}e\left(\exp(3ix)\right) \\ &= \mathcal{R}e\left((\exp(ix))^3\right) \\ &= \mathcal{R}e\left((\cos(x) + i\sin(x))^3\right) \\ &= \cos(x)^3 - 3\cos(x)\sin(x)^2 \\ &= 4\cos(x)^3 - 3\cos(x) \end{aligned}$$

Comme de plus,

$$\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$$

nous cherchons finalement les réels x tels que

$$4\cos(x)^3 - 4\cos(x)^2 - 3\cos(x) + 2 = 0.$$

En posant $X = \cos(x)$, nous sommes ramenés à l'étude du polynôme $4X^3 - 4X^2 - 3X + 2$. Il s'agit d'un polynôme de degré trois. Ne connaissant pas de formule permettant de trouver les racines, il doit y avoir une racine évidente. Une rapide recherche nous donne que $\frac{1}{2}$ est racine. Ainsi notre polynôme se factorise ainsi

$$4X^3 - 4X^2 - 3X + 2 = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(2X^2 - X - 2\right)$$

et nous pouvons appliquer la théorie classique sur le triômes pour trouver les autres racines. Finalement les trois racines de notre polynôme de degré 3 sont

$$\mathcal{S}_X = \{\frac{1}{2},\ \frac{1+\sqrt{17}}{4},\ \frac{1-\sqrt{17}}{4}\}$$

Il nous reste à revenir à nos solutions en $\cos(x)$. Nous avions posé $X = \cos(x)$. Ainsi il nous faut prendre en compte seulement les solutions de $\mathcal{S}_x$ comprises entre -1 et 1. Nous trouvons finalement

$$\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ -\alpha + 2k\pi,\ \alpha + 2k\pi\}$$

pour $\alpha = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$. Attention à ne pas oublier de cas, la fonction cosinus étant paire, il y a deux solutions pour chaque solution du polynôme en X !

Exercice 10

Pour résoudre un exercice de cette forme, il faut commencer par chercher la forme trigonométrique. Nous l'avons déjà fait dans l'exercice 7. Nous avions trouvé

$$z = 8\sqrt{2}\exp\left(-i\pi\frac{11}{12}\right).$$

Ainsi :

$$arg\left(\left(\frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5}{(1-i)^3}\right)^n\right) = -\frac{11n\pi}{12}\ (2\pi)$$

Nous devons donc résoudre

$$-\frac{11n\pi}{12}\ (2\pi) = 0\ (2\pi)$$

donc les solutions sont $\mathcal{S} = \{24k, k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 11
On applique la méthode classique :
1) On écrit le complexe de droite sous forme trigonométrique pour trouver une solution particulière.

$$4\sqrt{2}(1+i) = 8\exp(\frac{i\pi}{12}$$

donc

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\exp\left(\frac{i\pi}{4\times 3}\right) = 2\exp\left(\frac{i\pi}{12}\right)$$

est solution particulière.
2) On utilise les racines de l"unité pour trouver toutes les solutions.

$$z^3 = z_0^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1$$

donc

$$\mathcal{S} = \{z_0, z_j, z_0^2 j^2\}$$

où l'on laissera au lecteur le soin de simplifier les solutions.

Exercice 12
Il nous faut tout interpréter géométriquement.
La condition $a+c = b+d$ étant équivalente) $a-b = d-c$ nous donne $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ et donc que $ABCD$ est un parallélogramme.
La condition $a+ib = c+id$ peut aussi s'écrire $a-c = i(d-b)$ et donc donne que $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux et de même norme.
$ABCD$ est donc un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur et sont orthogonales. $ABCD$ est donc un carré !

Exercice 14
Pour commencer, on remarque facilement que $M = I$ est solution.
Pour $M \neq I$, les points I, M et M' sont alignés si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{IM'} = \lambda\overrightarrow{IM}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{iz-i}{z-i} \in \mathbb{R}.$$

Posons alors $x = \mathcal{R}e(z)$ et $y = \mathcal{I}m(z)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{I}m\left(\frac{iz-i}{z-i}\right) = 0 &\Leftrightarrow x(x-1) + y(y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$M \in \mathcal{C}\left(\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), r = \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Puis, M' est l'image de M par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc

$$M' \in \mathcal{C}\left(\Omega'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), r = \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Exercice 15

Soit $z \in \mathbb{C}(0,1)$ différent de 1. Il existe $\theta \in]0, 2\pi[$, tel que $z = \exp(i\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{1-\exp(i\theta)} \\ &= \exp\left(\frac{-i\theta}{2}\right)\frac{i}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1} i \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned} \tag{1}$$

Lorsque θ parcourt $]0, 2\pi[$, (c'est à dire quand z parcourt le cercle), $\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ parcourt $\mathbb{R}$. L'image du cercle unité est donc la droite $x = \frac{1}{2}$.